

UNIVERSITATE EXEMPLU

**LUCRARE DE LICENȚĂ CU TEMA
GENERALĂ :**

**Ecuatiile Câmpului Electromagnetic în
Relativitatea Specială și în
Relativitatea Generală**



2020

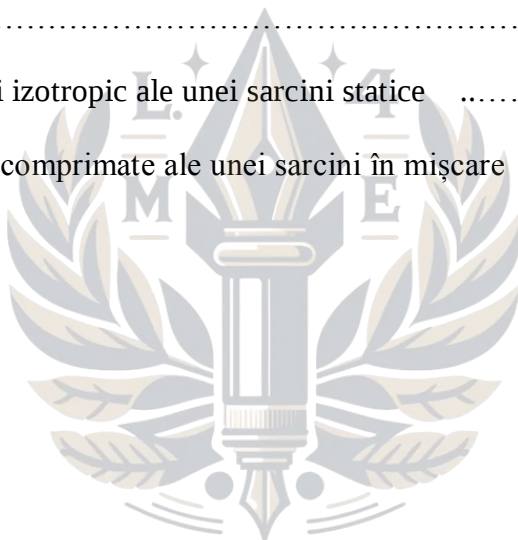
Cuprins

Lista figurilor	3
Introducere	4
Capitolul 1. Calcul Tensorial	8
1.1. Dualul unui spațiu vectorial	8
1.2. Aplicații multiliniare. Forme multiliniare	11
1.3. Tensori. Coordonatele unui tensor într-o bază	12
1.4. Operații cu tensori	14
1.4.1. Produsul tesorial a doi tensori	15
1.4.2. Con tracția unui tensor	15
1.5. Transformarea coeficienților unui tensor la schimbarea bazei	16
1.6. Ridicarea și coborarea indicilor	19
1.7. Câmpuri vectoriale	20
1.8. Câmpuri tensoriale	25
1.9. Conexiunea liniară	26
1.10. Metrici riemanniene	28
1.11. Operatori diferențiali pe o varietatea riemanniană	31
1.11.1. Gradientul	31
1.11.2. Hessiana	31
1.11.3. Divergența	32
1.11.4. Laplacianul	32
1.11.5. Rotorul	33
1.12. Forme alternate	33
1.13. Forme diferențiale alternate	35
Capitolul 2.	38
Electromagnetismul și relativitatea specială	38
2.1. Relativitatea specială	38
2.1.1. Transformările Lorentz	40
2.1.2. 4-Vectorii în tranformrea Lorentz	43
2.1.3. Ridicarea și coborârea indicilor	44
2.1.4. Vectori, covectori și tensori în relativitatea specială. Forma covariantă	45
2.1.5. Forma covariantă	46

2.1.6. Timpul propriu, distanța proprie. 4-Viteza, 4-impulsul, operatorul diferențial (4-gradientul) ∂^μ și operatorul lui D'alambert $\square$	47
2.2. Curenți conservați	49
2.2.1. Sarcini electrice văzute de observatori diferiți.....	49
2.2.2. Forțe electromagnetice văzute de observatori diferiți	50
2.3. Potențiale gauge și tensorul electromagnetic.....	53
2.3.1. Invarianta gauge și relativitatea	53
2.3.2. Tensorul câmpului electromagnetic	54
2.3.3. Exemplul 1	56
2.3.4. Exemplul 2	58
2.3.5. Scalarii Lorentz	58
2.4. Ecuațiile lui Maxwell	60
2.5. Forța Lorentz	61
2.5.1. Mișcarea în câmpuri constante	62
Capitolul 3	65
Relativitatea generală și ecuațiile lui Maxwell	65
3.1. Relativitatea generală	65
3.1.1. Ecuațiile lui Einstein	66
3.1.2. Formulări lagrangiene ale câmpului gravitațional	71
3.2. Compatibilitatea dintre relativitatea generală și ecuațiile lui Maxwell.....	75
3.2.1. Introducere	75
3.2.2. Declarații teoretice.....	78
3.2.3. Universalitatea relativității generale	79
3.2.4. Energia negativă.....	81
3.2.5. Câmpuri maxwelliene	83
3.2.6. Ecuațiile dinamice	85
3.2.7. Hodge / Minkowski.	87
3.2.8. Tensorul energie-impuls.....	88
3.2.9. Teoria Hodge	90
Concluzii	93
Bibliografie	97

Lista figurilor

Fig. 2.1 Transformările Lorentz. Sistemul S' în mișcare relativă cu viteza $\vec{v}$ constantă în raport cu sistemul	39
Fig. 2.2. Un conductor lung staționar în sistemul S , cu sarcina netă nulă, străbatut de un curent I ; și sarcina q care se deplasează cu viteza v în același direcție cu curentul I din conductor	49
Fig. 2.3. Conductorul văzut de un observator din sistemul S	49
Fig. 2.4. Conductorul văzut de un observator din sistemul S și un observator din sistemul S'	50
Fig. 2.5. Liniile câmpului izotropic ale unei sarcini statice	56
Fig. 2.6. Liniile de câmp comprimate ale unei sarcini în mișcare	56



Introducere

Teoria generală a relativității, formulată de Einstein în 1905, este una dintre cele mai faimoase teorii ale secolului XX. Teoria explică comportamentul obiectelor în spațiu și timp și poate fi folosită pentru a prezice totul, de la comportamentul planetelor până la existența anumitor obiecte și fenomene, cum ar fi găurile negre.

Unele dintre aplicațiile sale sunt:

- Sistemul de poziționare globală (GPS)
- Centralele nucleare
- Studiul găurilor negre, supernovelor și al altor fenomene din spațiul cosmic
- Comportamentul luminii în condiții diferite

Electromagnetismul a creat o mare revoluție în domeniul aplicațiilor ingineresti. În plus, acest lucru a cauzat un mare impact asupra diferitelor domenii, cum ar fi domeniul medical, industrial, spațial etc. Putem găsi o mulțime de aplicații practice a electromagnetismului în viața de zi cu zi, de la aparatele de uz casnic până la aplicații în cercetare. În aplicațiile casnice putem observa fenomenele în iluminat, încălzire și aparate de bucătărie; în sistemele de comunicații acest fenomen există în toate echipamentele de telecomunicații și în rețelele de comunicații; în sistemele industriale acest lucru poate fi aplicat în motoare, generatoare, senzori și dispozitive de acționare etc.

Ecuatiile Maxwell formează baza teoriei electromagnetice. Deci, sunt utilizate în tot ce implică energie electrică, magnetism, radio și lumină.

În această lucrare vom încerca să vedem electromagnetismul prin prisma relativității speciale și generale. Lucrarea este formată din trei capitole.

În primul capitol vorbim despre calculul tensorial care este esențial, mai târziu, pentru discuția noastră din capitolele 2 și 3. Aici discutăm despre dualul unui spațiu vectorial, forme multilineare, dăm definiția unui tensor, vedem care sunt coordonatele unui tensor într-o bază, prezentăm operațiile cu tensori, vom vedea cum se transformă coeficienții unui tensor la schimbarea bazei. De asemenea, vom discuta despre ridicarea și coborârea indicilor, câmpurile vectoriale, câmpurile tensoriale, conexiunea liniară, metricile riemaniene, operatorii diferențiali și despre formele alternate.

În al doilea capitol scopul nostru este de a vedea electromagnetismul prin prisma relativității speciale. Vom vedea că observatori din sisteme de referință diferite nu vor fi de acord cu ceea ce numesc câmpuri electrice și ceea ce numesc câmpuri magnetice. Vor observa densități de sarcină și curenți diferiți, dar toți vor fi de acord că acestea sunt legate de aceleași ecuații ale lui Maxwell. Vom vedea cum ecuațiile lui Maxwell se pot scrie sub forma a două ecuații covariante, fiind astfel compatibile cu relativitatea specială.

În secțiunea 2.1, a acestui capitol, prezentăm o scurtă introducere a relativității speciale. Aceasta este bazată pe două postulate: principiul relativității restrânse și invarianța lui c . Pe baza acestor postulate, Einstein deduce transformările Lorentz, care leagă

coordonatele de poziție și timpul unui eveniment fizic E în două sisteme de referință inerțiale (SRI), S și S' , unde S' este în mișcare relativă, cu viteza $\vec{v}$ constantă, în raport cu sistemul S (ecuațiile (2.1) și (2.2)). Aceste transformări au serie de consecințe: dilatarea timpului, contracția lungimilor, compunerea vitezelor, relativitatea simultaneității și altele. Discutăm despre invariantele Lorentz, care reprezintă o cantități fizice ce rămân neschimbate la transformările Lorentz. Continuăm cu 4-vectorii, pe care-i definim extinzând noțiunea de 3-vector prin adăugarea, pe lângă componentele spațiale, a unei a patra componente, cea a timpului. Aici vedem cum se transformă un 4-vector prin introducerea matricei Λ (2.5). Discutăm și despre ridicarea și coborârea indicilor. Vom vedea că această operație se realizează utilizând metrica Minkowski η . Introducem și noțiunea de co-vector, care este de fapt un obiect cu indice inferior, în timp ce un obiect cu indice superior este numit vector. Tot aici vom vedea cum se transformă acești covectori. Discutăm apoi despre forma covariantă a unei ecuații. Aceasta se definește ca fiind o ecuație exprimată exclusiv în termeni de 4-vectori și invarianți Lorentz. Acest lucru este important deoarece o ecuație care se poate scrie în formă covariantă este compatibilă cu relativitatea specială. În finalul acestei secțiuni prezentăm: timpul propriu, distanța proprie, 4-viteza, 4-impulsul, operatorul diferențial ∂^μ și operatorul lui d'alambert $\square$.

În secțiunea 2.2 vorbim despre curenți conservați. Aici introducem 4-densitatea curentului J^μ (2.18), cu ajutorul căreia, ecuația de continuitate se scrie sub forma covariantă, compatibilă cu relativitatea specială (2.19). Prin studierea transformării acestui 4-vector, deducem din prima componentă transformată, că observatori diferiți văd densități de sarcină diferite, fapt care se datorează contracției Lorentz și se poate explica astfel: densitatea sarcinii reprezintă sarcina pe unitatea de volum, iar volumul se contractă deoarece lungimile paralele cu mișcarea sunt supuse contracției Lorentz. Faptul că sarcina nu este invariantă Lorentz, face aluzie la câmpurile electrice (și magnetice), că nu sunt invarianți Lorentz. Observatori în SRI diferite vor fi de acord cu privire la modul în care un sistem electromagnetic se comportă, dar vor da explicații diferite pentru comportamentul său. În continuare vom discuta despre forțe electromagnetice văzute de observatori diferiți. În acest scop vom considera un conductor lung, staționar (în repaus) în sistemul S , cu sarcina netă nulă (egală cu zero), dar străbătut de un curent I . O sarcină q care se deplasează în același sens cu curentul din conductor simte o forță magnetică care o atrage către conductor (Fig. 2.2). Un observator din S vede un conductor neutru d.p.d.v. electric, cu același număr de sarcini pozitive și negative pe unitatea de lungime. În final vom vedea că forța ce acționează asupra particulei, care era pur magnetică în S , pare să fie pur electrostatică în S' .

Continuăm cu secțiunea 2.3, în care vorbim despre potențiale gauge și tensorul câmpului electromagnetic. Aici vom discuta despre cum câmpurile electrice și magnetice se transformă unul în altul, cum existența și modul de manifestare al câmpurilor electrice și magnetice depind de mișcarea observatorului. Mai exact, ceea ce pare a fi un câmp magnetic pentru un observator, va pare un câmp electric pentru altul și invers. Prezentăm tensorul câmpului electromagnetic. În scopul acesta, formăm tensorul anti-simetric $F_{\mu\nu}$ din 4-derivata ∂_μ și 4-vectorul A_μ . Acest tensor se numește tensorul câmpului electromagnetic. Această secțiune se termină cu dicuția despre scalarii Lorentz. Aici introducem tensorul alternativ $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, care ne permite să construim un al doilea tensor de câmp, uneori numit tensorul dublu electromagnetic $\hat{F}^{\mu\nu}$.

În cadrul secțiunii 2.4, vom arăta că ecuațiile lui Maxwell sunt compatibile cu relativitatea specială, prin scrierea acestora sub forma a două ecuații covariante. Vom arata cum din aceste două ecuații covariante rezultă cele patru ecuații vectoriale ale lui Maxwell; mai exact vom arata că ecuațiile lui Maxwell în formă relativistă (covariantă) coincid cu aceleași ecuații ale lui Maxwell scrise în formă vectorială.

În ultima secțiune 2.5 a acestui capitol, vom arăta că forța Lorentz este compatibilă cu relativitatea specială. Discutăm despre mișcarea în campuri constante. Știm deja cum câmpurile electrice și magnetice acționează asupra particulelor într-un univers newtonian: câmpurile electrice accelerează particulele în linii drepte, iar câmpurile magnetice fac ca particulele să migreze în traiectorii circulare. Aici vom relua această analiză în cadrul relativist. Legea forței Lorentz rămâne aceeași. Singura diferență este că acum impulsul este $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{u}$. Vom vedea cum acest fapt schimbă lucrurile mai întâi în cazul câmpului electric constant și apoi în cazul câmpului magnetic constant.

În ultimul capitol arătăm că ecuațiile lui Maxwell sunt universale, ceea ce determină ca gravitația și electromagnetismul să fie compatibile. Ecuațiile lui Maxwell pentru gravitație au fost mult timp considerate a fi un formalism, lipsit de relevanță pentru gravitație. Dar, folosind universalitatea ecuațiilor lui Maxwell, vom arăta că metoda variațională a lui Hilbert este utilizată pentru a determina tensorul energie-impuls, și pentru a arăta că relativitatea generală poate fi formulată pe baza câmpurilor Maxwelliene, în loc de câmpuri de forță fizică specifice. Se dovedește o teorie unificată a câmpului în care câmpurile de forță Maxwelliane sunt pe poziții de compatibilitate, distincte de câmpul geometric.

Acest capitol este format din secțiunea 3.1 și secțiunea 3.2, care la randul lor cuprind mai multe subsecțiuni mai mici.

Prima parte a acestui capitol (secț. 3.1) cuprinde două subsecțiuni: secț. 3.1.1 și secț. 3.1.2. În secț. 3.1.1 ne propunem să investigăm construcția unei teorii relativiste de câmp care descrie gravitația. Construcția se bazează pe argumente geometrice și pe cerința ca în limita nerelativistă să regăsim gravitația newtoniană. În a doua parte a acestei secțiuni (3.1.2) vom prezenta o formulare echivalentă a câmpului gravitațional privit drept câmp dinamic. Mai exact, vom enunța formularea Hilbert-Einstein în derivate ale câmpului gravitațional. În cadrul acestei formulări vom calcula ecuațiile de evoluție (care derivă din principiul variațional bazat pe o acțiune lagrangiană) și vom evidenția transformările gauge.

Ultima parte a acestui capitol (secț. 3.2) cuprinde nouă subsecțiuni. Aici prezentăm două teoreme. Prima, teorema 3.2.2.1, demonstrează că ecuațiile lui Maxwell sunt universale, independente de natura fizică a sursei de material care generează câmpul. Urmează apoi teorema 3.2.2.2, care folosește metoda variațională a lui Hilbert combinată cu universalitatea ecuațiilor lui Maxwell pentru a obține o formulare a relativității generale, bazată pe câmpuri Maxwelliane, în loc de câmpuri de forță specifice.

Teorema 3.2.2.1 este de interes matematic prin faptul că demonstrația ei constituie prima derivare matematică a ecuațiilor lui Maxwell bazată mai degrabă pe principii, decât pe legi empirice precum cele ale lui Faraday. Semnificația sa fizică este că este esențială pentru demonstrarea Teoremei 3.2.2.2. Pentru demonstrația Teoremei 3.2.2.1 se utilizează substanțial Teoria Hodge. Un rezumat al ideilor de bază este prezentat în secț. 3.2.9.

Teorema 3.2.2.2 va fi demonstrată în secț. 3.2.3. O teorie unificată a câmpului este esențială în modelarea structurilor masive cu câmpuri electromagnetice interne, cum ar fi o stea (secț. 3.2.4). Teorema arată, nu numai că ecuațiile lui Maxwell sunt relevante pentru gravitație, dar și faptul că relativitatea generală este relevantă în cazul în care câmpul electromagnetic este intens, de exemplu, în interiorul unei stele sau al universului timpuriu.

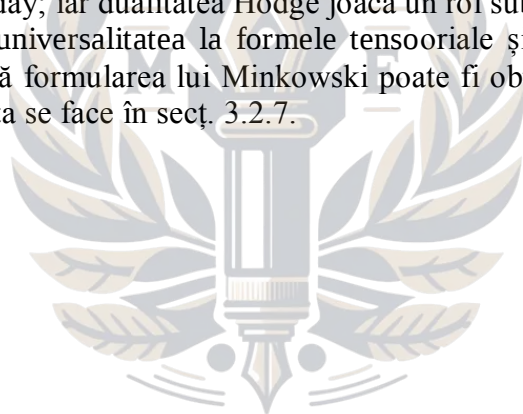
În secț. 3.2.8 obținem forma explicită a tensorului de energie-impuls (3.2.8) direct din (3.2.6) și (3.2.7). Ecuațiile statice necesită conservarea materialului și sunt obținute în secț. 3.2.5 ca o aplicare a teoremei de descompunere Hodge pe $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{E}^3$. Doi parametri ϵ , μ apar în teoria statică, iar în cursul derivării ecuațiilor dinamice obținem ecuația (3.2.3). Această ecuație a fost esențială pentru demonstrația lui Maxwell că lumina este un fenomen electromagnetic. Parametrii ϵ și μ reprezintă baza pentru dovada universalității. Prin (3.2.3)

ecuațiile lui Maxwell în prezența unei surse de material formează o familie de ecuații uniparametrice, notate cu μ . Parametrul ϵ este conectat cu legea lui Gauss pentru componenta conservatoare a câmpului de forță și este dată de $\epsilon = 1/4\pi G$, unde G este constanta forței asociată cu legea pătratică inversă și este pozitivă pentru forțe respingătoare și negativă pentru forțe atractive cf. sect. 3.2.5. Din (3.2.3) rezultă (3.2.4).

Este esențial pentru abordarea invariatională a lui Hilbert față de relativitatea generală, ca ecuațiile lui Maxwell să fie invariante la întregul grup de difeomorfism al spațiului-timp. Formularea lui Minkowski a acestora este limitată la spațiul-timp Minkowski, unde grupul de invarianță este grupul Poincaré. Această formulare este ușor extinsă pentru a obține reprezentarea tensorială a ecuațiilor lui Maxwell și a fost cunoscută atât de Einstein, cât și de Hilbert. Lagrangianul invariant este dat în (3.2.7); și forma invariantă (tensorială) a ecuațiilor este dată în (3.2.38), sect. 3.2.9.

Misner et al. [14] au obținut ecuațiile lui Maxwell în limbajul teoriei Hodge direct din forma lor vectorială. Deoarece aceste ecuații sunt specifice câmpului electromagnetic, această derivare nu stabilește universalitatea. Pentru a dovedi universalitatea, trebuie să derivăm ecuațiile în mod direct, folosind Legea lui Faraday. Acest lucru se face în sect. 3.2.6 prin înlocuirea legilor lui Faraday și Maxwell-Ampère cu cele două ipoteze ale lui Einstein din relativitatea specială. Se constată că ambele legi sunt valabile pentru toate câmpurile maxwelliene; acestea nu sunt presupuse în prealabil, ci urmează ca corolare matematice a relativității speciale. Derivarea se bazează pe 2 forme care corespund legilor Maxwell-Ampère și Faraday; iar dualitatea Hodge joacă un rol substanțial în demonstrație.

Pentru a extinde universalitatea la formele tensooriale și vectoriale ale ecuațiilor, este suficient să arătăm că formularea lui Minkowski poate fi obținută direct din forma lui Hodge a ecuațiilor; aceasta se face în sect. 3.2.7.



Capitolul 1. Calcul Tensorial

1.1. Dualul unui spațiu vectorial

Fie K un corp comutativ și V un K -spațiu vectorial. Prin forma liniară (sau funcțională) pe V se înțelege o aplicație liniară $F : V \rightarrow K$ (aici K este considerat ca un K -spațiu vectorial unidimensional).

Mulțimea tuturor formelor liniare, pe care o vom nota cu V^* , poate fi înzestrată cu o structură de K -spațiu vectorial în raport cu adunarea și înmulțirea cu scalari a formelor liniare. K -spațiul vectorial V^* se numește spațiul dual al spațiului vectorial V . Vom folosi termenul de formă liniară dacă V este finit dimensional și de funcțională liniară, dacă V este infinit dimensional.

Exemplul 1.1. Funcția $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, care asociază oricărui vector $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ scalarul $Tx = x^2 + x^2 + 3x^3$ este o formă liniară.

Exemplul 1.2. Funcția $\mathfrak{J}: C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, care asociază oricărei funcții continue $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ scalarul, $\mathfrak{J}(f) = \int_a^b f(x) dx$ este o funcțională liniară.

Fie V un K -spațiu vectorial de dimensiune n și fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza în V , atunci avem :

Observația 1.1.

Dacă $x = x^i e_i$, atunci, $f(x) = x^i f(e_i)$ deci o formă liniară este cunoscută dacă se cunosc valorile sale pe elementele din bază.

Observația 1.2.

Dacă, $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in K^n$, atunci există o unică formă liniară $F: V \rightarrow K$ astfel ca $F(e_i) = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$.

În consecință are loc :

Propoziția 1.1.

Dacă V este un K -spațiu vectorial n -dimensional și $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ este bază a sa, atunci pentru $\forall i$, $i = \overline{1, n}$, există o formă liniară unică $f^i: V \rightarrow K$ astfel ca

$$f^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases} . \quad (1.1)$$

Propoziția rezultă imediat din observația anterioară, luând pentru fiecare, $i = \overline{1, n}$, scalarii $\alpha_j = 0$ pentru $j \neq i$ și $\alpha_i = 1$.

În continuare, pornind de la o bază $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ a spațiului vectorial V , vom construi o bază în spațiul dual, care se va numi duala bazei B . Vom folosi convenția de sumare a lui Einstein.

Teorema 1.1.

Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază a spațiului vectorial V . Sistemul de forme liniare $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$ dat de (1.1) formează o bază a spațiului vectorial V^* numită duala bazei B .

Demonstrație. Sistemul B^* este liniar independent. Într-adevar, fie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ astfel ca $\lambda_1 f^1 + \dots + \lambda_n f^n = 0_{V^*}$, adică $(\lambda_1 f^1, \dots, \lambda_n f^n)(x) = 0$, $\forall x \in V$. În particular, dacă $x = e_i$, $i = \overline{1, n}$, obținem

$$(\lambda_1 f^1, \dots, \lambda_n f^n)(e_i) = 0,$$

deci B^* este liniar independent. Fie acum $f \in V^*$ și $\alpha_i = f(e_i) \in K$. Vom arata că $f = \alpha_i f^i$, deci B^* este un sistem de generatori pentru V^* , adică o bază a lui V^* . Într-adevăr, dacă $x = x^j e_j \in V$, atunci

$$\alpha_i f^i(x) = \alpha_i f^i(x^j e_j) = \alpha_i x^j f^i(e_j) = \alpha_i x^j \delta_j^i = \alpha_i x^i = x^i f(e_i) = f(x).$$

Teorema este demonstrată.

Observația 1.3.

Din teorema 1.2 rezultă că dacă $\dim_K V = n$, atunci $\dim_K V^* = n$, deci $V \simeq V^*$.

Teorema 1.2.

Fie un K -spațiu vectorial de dimensiune n și V^* dualul său. Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ și $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ două baze în V , iar $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$ și $B'^* = \{f'^1, \dots, f'^n\}$ bazele duale corespunzătoare. Dacă C este matricea de trecere de la baza B la baza B' , atunci $(C^T)^{-1}$ este matricea de trecere de la baza B^* la baza B'^* . În plus, coordonatele unei forme liniare $f \in V^*$ se transformă după aceeași lege ca și baza în V când se trece de la baza B^* la baza B'^* .

Demonstrație. Relațiile de schimbare a bazei în V sunt

$$e'_i = c_i^k e_k, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.2)$$

(indicele superior k se referă la linie, iar cel inferior i la coloană). Să presupunem că, în dual, trecerea de la baza B^* la B'^* s-ar face prin relațiile

$$f'^j = d_i^j f^i, \quad j = \overline{1, n} \quad (1.3)$$

(dacă $D = (d_i^j)$, D^t este matricea de trecere de la baza B^* la baza B'^*).

Din dualitatea bazelor rezultă

$$f^l(e_k) = \delta_k^l, \quad k, l = \overline{1, n}, \quad f'^j(e'_i) = \delta_i^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1.4)$$

Din relațiile (1.2) - (1.5), obținem pentru orice $i, j = \overline{1, n}$

$$\delta_i^j = f'^j(e'_i) = d_i^j f^l(c_i^k e_k) = d_i^j c_i^k f^l(e_k) = d_i^j c_i^k \delta_k^l = d_k^j c_i^k. \quad (1.5)$$

Aceste relații stabilesc că $DC = I_n$, deci $D = C^{-1}$. Matricea de trecere de la baza B^* la baza B'^* în spațiul V^* este $D^t = (C^{-1})^T = (C^T)^{-1}$.

Fie acum $f \in V^*$, $f = \alpha_j f^j = \beta_i f'^i$, unde $\alpha_j = f(e_j)$, $j = \overline{1, n}$, $\beta_i = f(e'_i)$, $i = \overline{1, n}$. Atunci, din (1.2), rezultă:

$$\beta_i = f(c_i^k e_k) = c_i^k f(e_k) = c_i^k \alpha_k, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.6)$$

adică, același gen de relație ca la schimbarea bazei în V .

În concluzie, din teorema 1.3 rezultă că, la o schimbare a bazei în V , bazele duale corespunzătoare se transformă după aceeași lege ca și coordonatele unui vector arbitrar din V , transformare care se va numi contravariantă, iar coordonatele unei forme liniare din V^* se transformă după aceeași lege ca și baza în V , transformare ce se va numi covariantă. Când folosim convenția lui Einstein, coordonatele vectorilor din V , ca și vectorii bazei duale vor avea indicii trecuți superior, pe când coordonatele formelor liniare și vectorii bazei din V vor avea indicii trecuți inferior. Formele liniare se mai numesc și covectori.

Exemplul 1.3. Fie baza canonică $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ în $\mathbb{R}^3$. Baza duală $B^* = \{f^1, f^2, f^3\}$ în spațiul dual $(\mathbb{R}^3)^*$ satisface (1.1). Dacă $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$, atunci $f^1(x) = x^1$, $f^2(x) = x^2$, $f^3(x) = x^3$. Să considerăm acum forma liniară $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^1 + 2x^2 + 3x^3$. Coordonatele lui f în baza duală sunt $\alpha_1 = f(e_1) = 1$, $\alpha_2 = f(e_2) = 2$, $\alpha_3 = f(e_3) = 3$. Fie acum baza $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ în $\mathbb{R}^3$, $e'_1 = e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = -e_1 + e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 - e_2 + e_3$. Matricea de trecere de la baza B la baza B' și invers este :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Atunci, duala bazei B' este legată de B^* prin relațiile

$$f'_1 = \frac{1}{2}f^1 + \frac{1}{2}f^2, \quad f'_2 = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}f^3, \quad f'_3 = \frac{1}{2}f^1 + \frac{1}{2}f^3.$$

Coordonatele formeii liniare f în noua bază vor fi

$$\beta_1 = f(e'_1) = f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0.$$

Similar

$$\beta_2 = f(e'_2) = 4, \quad \beta_3 = f(e'_3) = 2.$$

Dualul lui V^* , notat $V^{**} = \{f : V^* \rightarrow K ; f \text{ formă liniară} \}$, se numește bidualul lui V . Conform teoremei 1.2, $\dim_K V = \dim_K V^* = \dim_K V^{**} = n$, deci $V \simeq V^* \simeq V^{**}$. Mai mult are loc teorema de mai jos.

Terema 1.3.

Spațiile V^* și V^{**} sunt izomorfe prin aplicația $\mathfrak{J} : V \rightarrow V^{**}$, $\mathfrak{J}x = F_x$, unde $F_x(f) = f(x)$, $\forall f \in V^*$.

Demonstrație. Stabilim mai întâi că F_x este o formă liniară pe V^* , adică $F_x \in V^{**}$. Fie deci $f, g \in V^*$ și $\alpha, \beta \in K$. Atunci:

$$F_x(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha F_x(f) + \beta F_x(g).$$

Vom arata acum că $\mathfrak{J}$ este liniară. Fie $x, y \in V$ și $\alpha, \beta \in K$. Atunci

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\alpha x + \beta y)(f) &= F_{\alpha x + \beta y}(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha F_x(f) + \beta F_y(f) \\ &= (\alpha F_x + \beta F_y)(f), \quad \forall f \in V^* \end{aligned}$$

deci $\mathfrak{J}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathfrak{J}x + \beta \mathfrak{J}y$. Pentru a demonstra că $\mathfrak{J}$ este bijectivă, cu $\dim_K V = \dim_K V^{**}$, este suficient să arătăm că $\mathfrak{J}$ este injectivă. Fie deci $x, y \in V$ astfel încât $\mathfrak{J}x = \mathfrak{J}y$, adică $F_x = F_y$. Atunci, pentru orice $f \in V^*$, avem :

$$f(x) = F_x(f) = F_y(f) = f(y). \quad (1.7)$$

Dacă $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ este o bază în V , iar $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$ este bază duală și, luând în (1.7), $f = f^i$, $i = \overline{1, n}$, obținem :

$$x^i = f^i(x) = f^i(y) = y^i,$$

adică $x = y$, deci $\mathfrak{J}$ este injectivă.

Observația 1.5.

Prin acest izomorfism canonic dintre V și V^{**} vom identifica un spațiu vectorial cu bidualul său. Prin această identificare, orice vector $x \in V$ poate fi privit ca o formă liniară pe V^* ce asociază oricărui $f \in V^*$, scalarul $f(x)$.

1.2. Aplicații multiliniare. Forme multiliniare**Definiția 2.1.**

Fie $V_1, \dots, V_n, W$ spații vectoriale peste același corp K . Aplicația $F : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ se numește multiliniară (n -liniară) dacă pentru orice i , $1 \leq i \leq n$, avem :

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x'_i + \beta x''_i, x_{i+1}, \dots, x_n) &= \alpha F(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \\ &+ \beta F(x_1, \dots, x_{i-1}, x''_i, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad \forall \alpha, \beta \in K, \quad x'_i, x''_i \in V_i, \quad x_k \in V_k, \quad k \neq i \end{aligned}$$

Exemplul 2.1 Aplicația $F : V_3 \times V_3 \rightarrow V_3$, $F(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{v}$, este o aplicație biliniară antisimetrică ($\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$).

Definiția 2.2

Fie $V_1, \dots, V_n$ spații vectoriale peste corpul K . Se numește formă multiniară (n -liniară) orice aplicație multiliniară $F : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow K$.

În această definiție K este considerat spațiu vectorial unidimensional peste el însuși.

Exemplul 2.2 $F : V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ (deci produsul scalar a doi vectori liberi), este o formă biliniară simetrică.

Exemplul 2.3 ($F : V_3 \times V_3 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (deci produsul mixt a trei vectori liberi), este o formă triliniară.

Observația 2.1.

Multimea formelor n -liniare se poate înzestra cu o structură de K -spațiu vectorial peste K , notându-se cu $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; K)$.

Adunarea formelor n -liniare $F, G \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; K)$ se definește astfel :

$$(F + G)(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) + G(x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in V_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Produsul unei forme n -liniare $F \in \mathcal{L}(V_1, \dots, V_n; K)$ cu un scalar $\alpha \in K$ se definește prin :

$$(\alpha F)(x_1, \dots, x_n) = \alpha F(x_1, \dots, x_n), \quad x_i \in V_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Se verifică ușor că $F + G$ și αF definite mai sus, sunt forme n -liniare.

1.3. Tensori. Coordonatele unui tensor într-o bază

Definiția 3.1.

Fie V un spațiu vectorial peste K , iar V^* dualul său. Dacă $p, q \in \mathbb{N}$, se numește tensor de p ori covariant și q ori contravariant orice formă multiliniară

$$t : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{p \text{ ori}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ ori}} \rightarrow K.$$

Se spune că t este tensor de tip (p, q) , p numindu-se *ordinul de covarianță*, iar q *ordinul de contravarianță*. Numarul $p+q$ se numește *rangul sau valența tensorului*.

Exemplul 3.1. Orice formă liniară $f \in V^*$, deci $f : V \rightarrow K$, este un tensor de tip $(1,0)$.

Exemplul 3.2. Orice vector $x \in V$, privit ca o formă liniară, $F_x : V^* \rightarrow K$ (cf. teoremei 1.4) este un tensor de tip $(0,1)$.

Exemplul 3.3. Orice scalar $\alpha \in K$ poate fi considerat tensor de tip $(0,0)$.

Vom nota cu $T_p^q(V)$ mulțimea tuturor tensorilor de p ori covarianti și q ori contravarianti pe spațiul vectorial V . Conform observației din secțiunea anterioară, $T_p^q(V)$

este un un K -spațiu vectorial în raport cu adunarea tensorilor și produsul unui tensor cu un scalar.

În continuare, fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în V și $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$ baza duală în B^* . Fie $t \in T_p^q(V)$, iar $x_1, \dots, x_p \in V$, $h^1, \dots, h^q \in V^*$. Atunci,

$$x_i = \delta_i^{j_i} e_{j_i}, \quad i = \overline{1, p}, \quad h^l = \alpha_{k_l}^l f^{k_l}, \quad l = \overline{1, q}.$$

(aici j_i și k_l sunt indici de sumare). Folosind liniaritatea lui t în fiecare argument, avem:

$$t(x_1, \dots, x_p, h^1, \dots, h^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \alpha_{k_1}^1 \dots \alpha_{k_q}^q t(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, \dots, f^{k_q}). \quad (3.1)$$

În această relație apar n^{p+q} scalari, pe care-i vom nota

$$\tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} = t(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, \dots, f^{k_q}), \quad (3.2)$$

$$j_i = \overline{1, n}, \quad \forall i = \overline{1, p}, \quad k_l = \overline{1, n}, \quad \forall l = \overline{1, q}$$

și se numesc coeficienții tensorului t în baza B fixată în V . Atunci (3.1) se scrie:

$$t(x_1, \dots, x_p, h^1, \dots, h^q) = \xi_1^{j_1} \dots \xi_p^{j_p} \alpha_{k_1}^1 \dots \alpha_{k_q}^q \tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} \quad (3.3)$$

În concluzie, fiecărui tensor $t \in T_p^q(V)$ i se poate asocia, fixând o bază în V , un sistem de n^{p+1} scalari unic determinați prin (3.2).

Propoziția 3.1.

Fie V un K -spațiu vectorial n -dimensional și $p, q \in \mathbb{N}$. Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în V și $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$ baza duală a ei. Dat fiind un sistem de n^{p+1} scalari

$$\left(\tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} \right), \quad j_i = \overline{1, n}, \quad \forall i = \overline{1, p}, \quad k_l = \overline{1, n}, \quad \forall l = \overline{1, q},$$

există un unic tensor $t \in T_p^q(V)$ astfel ca

$$t(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, \dots, f^{k_q}) = \tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q},$$

pentru orice $j_1, \dots, j_p, k_1, \dots, k_q$ luând independent valori de la 1 la n .

Corolar 3.1. Dacă V este un K -spațiu vectorial de dimesiune n , atunci $T_p^q(V) \simeq K^{n^{p+q}}$, deci $\dim_K T_p^q(V) = n^{p+q}$.

Demonstrație. Fie $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază fixată în V , iar $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$ duala sa în V^* . Izomorfismul căutat este aplicația care asociază fiecărui tensor $t \in T_p^q(V)$, coeficienții săi în baza fixată. Din cele de mai sus, rezultă că această aplicație este o bijecție. Liniaritatea se verifică ușor.

Exemplul 3.4. Formele biliniare pe un spațiu vectorial V n -dimensional sunt tensori dublu covarianți. Spațiul vectorial al acestor tensori, $T_2^0(V)$ are dimensiunea n^2 . Dacă $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază în V și $t : V \times V \rightarrow K$ un tensor dublu covariant oarecare, atunci pentru orice $x, y \in V$, $x = \xi^i e_i$, $y = \eta^j e_j$, avem

$$t(x, y) = \xi^i \eta^j t(e_i, e_j) = \xi^i \eta^j \tau_{ij},$$

$\tau_{ij} = t(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, fiind coeficienții tensorului în baza fixată.

Exemplul 3.5. Formele biliniare pe spațiul V^* sunt tensori dublu contravarianți. Dacă $\dim_K V = n$, spațiul vectorial al acestor tensori notat $T_0^2(V)$ are dimensiune n^2 .

Fie acum $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în V și $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$ duala sa. Dacă $t : V^* \times V^* \rightarrow K$ este un tensor dublu contravariant, atunci pentru orice $g, h \in V^*$, $g = \alpha_i f^i$, $h = \beta_j f^j$, avem $t(g, h) = \alpha_i \beta_j t(f^i, f^j) = \alpha_i \beta_j \tau^{ij}$, unde $\tau^{ij} = t(f^i, f^j)$, $i, j = \overline{1, n}$ sunt coeficienții tensorului în baza fixată.

Exemplul 3.6. Formele biliniare $t : V \times V^* \rightarrow K$ sunt tensori o dată covarianți și o dată contravarianți. Dacă $\dim_K V = n$, spațiul vectorial al acestor tensori, $T_1^1(V)$ are dimensiunea n^2 . Cu notațiile de mai sus, dacă $x = \xi^i e_i \in V$, $h = \alpha_j f^j \in V^*$, atunci $t(x, h) = \xi^i \alpha_j t(e_i, f^j) = \xi^i \alpha_j \tau_i^j$, unde $\tau_i^j = t(e_i, f^j)$, $i, j = \overline{1, n}$ sunt coeficienții tensorului τ în baza fixată.

1.4. Operații cu tensori

Fie V un K -spațiu vectorial n -dimensional, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază în V și $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$ duala sa. Considerăm $p, q \in \mathbb{N}$, $t, u \in T_p^q(V)$, $\alpha \in K$. Dacă $x_1, \dots, x_p \in V$ și $h^1, \dots, h^q \in V^*$, atunci suma $t + u$ este un tensor de același tip și $(t + u)(x_1, \dots, x_p, h^1, \dots, h^q) = t(x_1, \dots, x_p, h^1, \dots, h^q) + u(x_1, \dots, x_p, h^1, \dots, h^q)$, iar produsul unui tensor t cu un scalar α este un tensor de același tip

$$(\alpha t)(x_1, \dots, x_p, h^1, \dots, h^q) = \alpha t(x_1, \dots, x_p, h^1, \dots, h^q).$$

Se verifica ușor că, într-o bază fixată, coeficienții sumei $t + u$ se obțin însumând coeficienții corespunzători lui t și u , deci dacă :

$$\tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} = t(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, \dots, f^{k_q}),$$

$$\sigma_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} = u(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, \dots, f^{k_q}),$$

atunci

$$(t + u)(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, \dots, f^{k_q}) = \tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} \sigma_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q},$$

Similar, coeficienții produsului unui tensor cu un scalar într-o bază fixată, se obțin înmulțind coeficienții tensorului cu scalarul respectiv, deci

$$(\alpha t)(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, \dots, f^{k_q}) = \alpha \tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q}.$$

1.4.1. Produsul tensorial a doi tensori

Fie $q, r, s \in \mathbb{N}$ și $t \in T_p^q(V)$, $u \in T_r^s(V)$. Atunci aplicația:

$$t \otimes u : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{p+r \text{ ori}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{q+s \text{ ori}} \rightarrow K,$$

definită prin:

$$\begin{aligned} (t \otimes u)(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+r}, h^1, \dots, h^q, h^{q+1}, \dots, h^{q+s}) \\ = t(x_1, \dots, x_p, h^1, \dots, h^q) \cdot u(x_{p+1}, \dots, x_{p+r}, h^{q+1}, \dots, h^{q+s}), \end{aligned}$$

pentru orice $x_i \in V_i$, $i = \overline{1, p+r}$, $h^j \in V^*$, $j = \overline{1, q+s}$, este un tensor de ordin $(p+r, q+s)$ numit produsul tensorial al celor doi tensori.

Dacă

$$\begin{aligned} \tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} &= t(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, \dots, f^{k_q}), \\ \sigma_{j_1, \dots, j_r}^{l_1, \dots, l_s} &= u(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}, f^{l_1}, \dots, f^{l_s}), \end{aligned}$$

atunci

$$\begin{aligned} \rho_{j_1, \dots, j_{p+r}, i_1, \dots, i_r}^{k_1, \dots, k_q, l_1, \dots, l_s} &= (t \otimes u)(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, f^{k_1}, \dots, f^{k_q}, f^{l_1}, \dots, f^{l_s}) \\ &= \tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} \cdot \sigma_{i_1, \dots, i_r}^{l_1, \dots, l_s}. \end{aligned}$$

Așadar coeficienții tensorului $(t \otimes u) \in T_{p+r}^{q+s}(V)$ se obțin efectuând produsele coeficienților celor doi tensori.

Exemplul 4.1. Fie $\dim_K V = 2$, $B = \{e_1, e_2\}$ o bază în V , $B^* = \{f^1, f^2\}$ baza duală, $t \in T_2^0(V)$, $u \in T_0^1(V)$. Dacă $\tau_{ij} = t(e_i, e_j)$, $i, j = 1, 2$ sunt coeficienții lui t în baza fixată, iar $\sigma^k = (f^k)$, $k = 1, 2$, coeficienții lui u , atunci $(t \otimes u) \in T_2^1(V)$, coeficienții săi fiind:

$$\rho_{ij}^k = (t \otimes u)(e_i, e_j, f^k) = t(e_i, e_j)u(f^k) = \tau_{ij}\sigma^k$$

1.4.2. Contracția unui tensor

Fie $t \in T_p^q(V)$ cu $p, q > 1$. Fixăm un indice i , $i = \overline{1, n}$ de covarianță și un indice l , $l = \overline{1, q}$ de contravarianță. Vom construi un tensor $t' \in T_{p-1}^{q-1}(V)$, astfel :

$$t' : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{p-1 \text{ ori}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{q-1 \text{ ori}} \rightarrow K,$$

$$\begin{aligned} t'(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p, h^1, \dots, h^{l-1}, h^{l+1}, \dots, h^q) &= \\ = t(x_1, \dots, x_{i-1}, e_i, x_{i+1}, \dots, x_p, h^1, \dots, h^{l-1}, f^l, h^{l+1}, \dots, h^q), \end{aligned}$$

cu

$$x_j \in V, j = \overline{1, p}, j \neq i, h^k \in V^*, k = \overline{1, q}, k \neq l$$

Coeficienții tensorului t' vor fi

$$\begin{aligned} \sigma_{j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_{l-1}, k_{l+1}, \dots, k_q} &= t' \left(e_{j_1}, \dots, e_{j_{i-1}}, e_{j_{i+1}}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, \dots, f^{k_{l-1}}, f^{k_{l+1}}, \dots, f^{k_q} \right) \\ &= \tau_{j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_{l-1}, k_{l+1}, \dots, k_q}, \end{aligned}$$

s fiind indice de sumare, iar $\tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q}$ coeficienții lui t în baza fixată.

Vom spune că am efectuat o contracție după indicele de ordin i de covarianță și indicele de ordin l de contravarianță. Tensorul astfel obținut se va nota $(t)_i^l$.

Exemplul 4.2. Fie $t \in T_1^1(V)$ și τ_i^j , $i, j = \overline{1, n}$ coeficienții tensorului. Efectuând o contracție după cei doi indici, se obține un tensor de tip $(0,0)$ deci un scalar, numit *urma tensorului* t și se notează $Tr t = \tau_i^i = \tau_1^1 + \dots + \tau_n^n$.

Exemplul 4.3. Fie $t \in T_2^1(V)$ și τ_{ij}^k , $i, j, k = \overline{1, n}$ coeficienții lui t . Coeficienții lui $t' = (t)_2^1 \in T_1^0(V)$ sunt $\sigma_i = t'(e_i) = t(e_i, e_j, f^j) = \tau_{ij}^j = \tau_{i1}^1 + \tau_{i2}^2 + \dots + \tau_{in}^n$.

1.5. Transformarea coeficienților unui tensor la schimbarea bazei

Fie V un K -spațiu vectorial de dimensiune n , $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ două baze ale lui V și $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$, $B'^* = \{f'^1, \dots, f'^n\}$ bazele duale respective. Fie $C = (c_i^j)$ matricea de trecere de la baza B la baza B' și $D = (d_i^j)$ inversa ei. Are loc teorema de mai jos.

Teorema 5.1.

Dacă coeficienții tensorului $t \in T_p^q(V)$ în cele două baze sunt

$$\tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q} = t(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}, f^{k_1}, \dots, f^{k_q})$$

respectiv

$$\tau_{i_1, \dots, i_p}^{l_1, \dots, l_q} = t(e'_{i_1}, \dots, e'_{i_p}, f'^{l_1}, \dots, f'^{l_q})$$

atunci relația de transformare a coeficienților este

$$\tau_{i_1, \dots, i_p}^{l_1, \dots, l_q} = c_{i_1}^{j_1} \dots c_{i_p}^{j_p} d_{k_1}^{l_1} \dots d_{k_q}^{l_q} \tau_{j_1, \dots, j_p}^{k_1, \dots, k_q}. \quad (5.1)$$

Demonstrație. Folosind formulele de schimbare de bază (1.2), (1.3), obținem:

$$\begin{aligned} \tau'_{i_1, \dots, i_p}{}^{l_1, \dots, l_q} &= t(e'_{i_1}, \dots, e'_{i_p}, f'^{l_1}, \dots, f'^{l_q}) = \\ &= t(c_{i_1}^{j_1} e_{j_1}, \dots, c_{i_p}^{j_p} e_{j_p}, d_{k_1}^{l_1} f^{k_1}, \dots, d_{k_q}^{l_q} f^{k_q}) = c_{i_1}^{j_1} \dots c_{i_p}^{j_p} d_{k_1}^{l_1} \dots d_{k_q}^{l_q} \tau_{j_1, \dots, j_p}{}^{k_1, \dots, k_q}. \end{aligned}$$

Am ținut seama de liniaritatea lui t în fiecare argument.

Observația 5.1.

Relația (5.1) din enunțul teoremei 5.1 este folosită adesea pentru a prezenta noțiunea de tensor, în modul următor.

Dacă V este un spațiu vectorial n -dimensional, spunem că am dat un *tensor de p ori covariant și q ori contravariant pe V* dacă am asociat fiecărei baze $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ a spațiului V un sistem de n^{p+q} scalari :

$$(\tau_{j_1, \dots, j_p}{}^{k_1, \dots, k_q}), \quad j_1 = \overline{1, n}, \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad k_l = \overline{1, n}, \quad \forall l = \overline{1, q}, \quad (5.2)$$

care la schimbarea bazei în V se transformă după legea (5.1).

Scalarii (5.2) se numesc coeficienții tensorului de tip (p, q) considerat în baza B . Aceasta definiție este echivalentă cu definiția unui tensor, deoarece din propoziția 3.1 rezultă că dați fiind coeficienții (5.2) există un unic tensor $t \in t_p^q(V)$ care are acești coeficienți în baza fixată B din V . Reciproc, rezultă din teorema 5.1.

Exemplul 5.1. Fie $t : V \times V^* \rightarrow K$ tensorul de tip $(1,1)$ definit prin $t(x, f) = f(x)$, $\forall x \in V, f \in V^*$. Considerăm în baza $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ și duala sa $B^* = \{f^1, \dots, f^n\}$. Coeficienții tensorului t în baza B sunt :

$$t(e_i, f^j) = f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{daca } i = j \\ 0, & \text{daca } i \neq j \end{cases}, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Dacă $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ este o altă bază în V , iar $B'^* = \{f'^1, \dots, f'^n\}$ duala sa în V^* , atunci coeficienții lui t în noua bază sunt $t(e'_k, f'^l) = \delta_k^l$, $\forall l = \overline{1, n}$. Așadar coeficienții acestui tensor sunt independenți de baza considerată. Acest tensor mai poate fie prezentat ca fiind sistemul de n^2 scalari, $\{\delta_i^j\}_{i,j=\overline{1,n}}$, care la schimbarea bazei spațiului V se transformă după legea

$$\delta_i'^j = c_i^k d_l^j \delta_k^l, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Dar cum $c_i^k d_l^j \delta_k^l = c_i^k d_k^j = \delta_i^j$, $\forall i, j = \overline{1, n}$ ($D = C^{-1}$), rezultă

$$\delta_i'^j = \delta_i^j, \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Exemplul 5.2. Fie $t \in T_2^2(V)$ și $t' = (t)_2^1$, tensorul obținut prin contracția după al doilea indice de covarianță și primul indice de contravarianță. Cu relațiile de mai sus, fie

$$\tau_{jk}^{rs} = t(e_j, e_k, f^r, f^s), \quad j, k, r, s = \overline{1, n},$$

respectiv

$$\tau'_{il}{}^{\alpha\beta} = t(e'_i, e'_l, f'^\alpha, f'^\beta), \quad i, j, \alpha, \beta = \overline{1, n},$$

coeficienții lui t în cele doua baze fixate.

De asemenea, fie $\sigma_r^j = t'(e_r, f^j)$, $r, j = \overline{1, n}$ si $\sigma_i'^p = t'(e'_i, f'^p)$, $i, p = \overline{1, n}$, coeficienții tensorului contractați. Atunci:

$$\begin{aligned} \sigma_i'^p &= t(e'_i, e'_l, f'^l, f'^p) = \tau'_{il}{}^{lp} = c_i^j c_l^k d_s^l d_r^p \tau_{jk}^{sr} = c_i^j \delta_s^k d_r^p \tau_{jk}^{sr} = \\ &= c_i^j d_r^p \tau_{jk}^{sr} = c_i^j d_r^p t(e_j, e_k, f^k, f^r) = c_i^j d_r^p t'(e_j, f^r) = c_i^j d_r^p \sigma_j^r, \end{aligned}$$

ceea ce reprezintă exact legea de transformare a unui tensor o dată covariant și o dată contravariant la schimbarea bazei.

Observatia 5.2.

Fie $T \in \mathcal{L}(V)$ și $A = (a_j^k)$ matricea lui T în baza B , $A' = (a_i'^l)$ matricea lui T în baza B' . Legătura dintre ele este

$$a_i'^k = c_i^j a_j^k, \quad \forall i, k = \overline{1, n}$$

sau

$$a_i'^s = a_i'^l \delta_l^s = a_i'^l c_l^k d_k^s = c_i^j d_k^s a_j^k, \quad \forall i, s = \overline{1, n},$$

care reprezintă formulele de transformare ale unui tensor o dată covariant și o dată contravariant.

Endomorfismului T îi punem în evidență în mod unic un tensor $t : V \times V^* \rightarrow K$, $\forall x \in V, f \in V^*$. În acest fel, se definește o aplicație $\varphi : \mathcal{L}(V) \rightarrow T_1^1(V)$ care este un izomorfism de spații vectoriale. Coeficienții tensorului t astfel definit sunt

$$t(e_i, f^j) = f^j(Te_i) = f^j(a_i^k e_k) = a_i^k f^j(e_k) = a_i^k \delta_k^j = a_i^j, \quad \forall i, j = \overline{1, n},$$

deci chiar elementele matricei lui T în baza B . În acest mod orice endomorfism $T \in \mathcal{L}(V)$ poate fi privit ca un tensor o dată covariant și o dată contravariant (identificând T cu t prin acest izomorfism).

1.6. Ridicarea și coborarea indicilor

Presupunem că V este un spațiu Euclidian. Produsul scalar $(\cdot)$ pe V este un tensor covariant de ordinul doi (forma biliniară), simetric și pozitiv definit. Aceasta se numește metrica riemanniană pe V . Metrica induce transformarea liniară nesingulară (izomorfism) $\mathcal{G} : V \rightarrow V^*$, $\mathcal{G}(u)(v) = (u, v)$, $\forall u, v \in V$. Fie $\mathcal{G}^{-1}$ inversa lui $\mathcal{G}$; dacă $\omega \in V^*$, atunci $(\mathcal{G}^{-1}\omega, v) = \omega(v)$.

Fie $\{e_i\}$ o bază ortonormată în V . Dacă notăm $(e_i) = e^i$, $i = 1, \dots, n$, atunci $\mathcal{G}(e_i)(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, adică $e^i(e_j) = \delta_{ij} = (\delta_j^i)$. Rezultă că mulțimea $\{e^i\}$ este o bază duală a lui $\{e_i\}$ în V^* .

Fie $\{e^k \otimes e^l\}$ bază în $T_2^0(V)$. Metrica Riemanniană și transformarea liniară nesingulară asociată $\mathcal{G}$ sunt caracterizate prin matricea $[g_{kl}]$ simetrică și pozitiv definită. Inversa lui (g_{kl}) este o matrice simetrică, pozitiv definită, și se notează cu (g^{kl}) ; deci $g_{kl}g^{kj} = \delta_l^j$. Dacă v^k este un vector din V atunci $g_{kl}v^k$ este un vector din V^* ; dacă ω^k este un vector din V^* atunci $g^{kl}\omega_k$ este un vector din V . Acestea se extind prin definițiile care urmează.

Definiția 6.1.

Fie $s = 1, \dots, p$; $t = 1, \dots, q$ și $T \in T_q^p(V)$. Funcția definită prin

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{s,t} : T_q^p(V) &\rightarrow T_{q+1}^{p-1}(V), (\mathcal{G}_{s,t}T)(\omega^1, \dots, \omega^{p-1}, v_1, \dots, v_{q+1}) = \\ &= T(\omega^1, \dots, \omega^{s-1}, \mathcal{G}(v_t), \omega^s, \dots, \omega^{p-1}, v_1, \dots, v_t, \dots, v_{q+1}), \end{aligned}$$

unde semnul $\wedge$ înseamnă că argumentul respectiv lipsește, se numește coborârea indicilor.

Pe componente,

$$(\mathcal{G}_{s,t}T)_{j_1 \dots j_{t-1} s j_{t+1} \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_{p-1}} = g_{st} T_{j_1 \dots j_{t-1} t j_{t+1} \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_{s-1} t i_s \dots i_{p-1}}.$$

Analog, utilizând pe $\mathcal{G}^{-1}$, se definește ridicarea indicilor.

Izomorfismul $\mathcal{G}$ permite identificarea lui V cu V^* . De asemenea prin intermediul coborării și ridicării indicilor el induce un izomorfism între $T_q^p(V)$ și $T_p^q(V)$. În acest context vorbim despre componentele contravariante, mixte sau covariante (după caz) ale aceluiași tensor. De exemplu

$$g^{li}g^{mk}T_{ik}, \quad g^{li}T_{ik}, \quad T_{ik}$$

sunt respectiv componentele contravariante, mixte și covariante ale tensorului de ordinul doi $T = T_{ik}e^i \otimes e^k$.

1.7. Câmpuri vectoriale

Fie M o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$. Mulțimea $\mathcal{F}(M)$ a tuturor funcțiilor reale (câmpurilor scalare) diferențiabile de clasă C^∞ definite pe M este un spațiu vectorial real. Deoarece înmulțirea funcțiilor reale este o operație $\mathbb{R}$ -biliniară, comutativă, mulțimea $\mathcal{F}(M)$ este o algebră comutativă.

Fie $x = \{x^1, \dots, x^n\} \in M$ și $f \in \mathcal{F}(M)$. Unui vector X_x tangent la M în punctul x i se asociază numărul

$$X_x(f) = \left. \frac{d}{dt} f(x + tX) \right|_{t=0},$$

numit derivata lui f în raport cu X_x sau derivata lui f după direcția X_x . Derivata după o direcție are următoarele proprietăți:

$$X_x(af + bg) = aX_x(f) + bX_x(g)$$

$$X_x(fg) = (X_x(f))g(x) + f(x)X_x(g)$$

$$(aX_x + bY_x)(f) = aX_x(f) + bY_x(f),$$

unde X_x, Y_x sunt vectorii tangenți la M în punctul x , a și $b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Să privim acum lucrurile dintr-un alt punct de vedere. Se observă că dacă dăm regula $f \rightarrow X_x(f)$ atunci X_x este bine determinat. Astfel suntem conduși la următoarea definiție care este potrivită pentru teoria câmpurilor vectoriale.

Definiția 7.1.

O funcție $X_x : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile

$$X_x(af + bg) = aX_x(f) + bX_x(g)$$

$$X_x(fg) = (X_x(f))g(x) + f(x)X_x(g),$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$, se numește vector tangent la M în punctul x .

În acest context se observă că funcția definită prin $O_x(f) = 0$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$, deci vectorul zero, ca și operatorii de derivare parțială $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_x, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_x$ sunt vectori tangenți la M în punctul x . De asemenea, dacă $f = g = 1$, atunci $X_x(1) = 2X_x(1)$ și deci $X_x(1) = 0$. În plus $X_x(c) = cX_x(1) = 0$, pentru orice funcție constantă c . Identificând funcțiile constante cu valorile lor putem spune că valorile oricărui vector tangent pe scalari sunt nule.

Fie $T_x M$ mulțimea tuturor vectorilor tangenți la M în punctul x . Elementele lui $T_x M$ sunt funcții reale definite pe $\mathcal{F}(M)$ și deci are sens suma a doi vectori tangenți și produsul dintre un număr real și un vector tangent. Mai mult, pentru fiecare $x \in M$, mulțimea $T_x M$ este un spațiu vectorial real.

Teorema 7.1.

Mulțimea $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x, i = 1, \dots, n \right\}$ este o bază a spațiului vectorial $T_{x_0} M$ (reper în punctul x_0).

Demonstrație. Evident $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$, $i = 1, \dots, n$ face parte din $T_{x_0}M$. Să arătăm că ei sunt liniar independenți. Pentru aceasta pornim de la relația $a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0} = 0$ și folosim funcțiile coordonate $x^j : M \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. În baza definiției 7.1, a faptului că $T_{x_0}M$ este un spațiu vectorial și a observației $\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ rezultă

$$0 = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0} (x^j) = a^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}\Big|_{x_0} = a^i \delta_i^j = a^j, \quad j = 1, \dots, n.$$

A rămas să demonstrăm că $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n \right\}$ generează pe $T_{x_0}M$. Pentru aceasta observăm că pe o vecinătate convexă a lui x_0 și pentru orice $f \in \mathcal{F}(M)$ avem

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0 + t(x - x_0)) dt \\ &= f(x_0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{(x_0+t(x-x_0))} (x^i - x_0^i) dt = \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) g_i(x), \end{aligned}$$

unde

$$g_i(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Conform definiției 7.1 și a observației că valorile lui X_x pe constante sunt nule, găsim

$$\begin{aligned} X_x(f) &= \sum_{i=1}^n X_x(x^i - x_0^i) g_i(x) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) X_x(g_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n X_x(x^i) g_i(x) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) X_x(g_i). \end{aligned}$$

Înlocuirea $x = x_0$ implică

$$X_{x_0}(f) = \sum_{i=1}^n X_{x_0}(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Tinând seama că $f \in \mathcal{F}(M)$ este arbitrară și notând $X_{x_0}(x^i) = a^i$, deducem

$$X_{x_0} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0}.$$

Numerele $X_{x_0} = a^i$ se numesc componentele lui X_{x_0} , iar reperul $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n \right\}_{x_0}$ se numește *reper natural*.

Dacă raportăm pe $T_{x_0}M$ la reperul natural, atunci adunarea a doi vectori se reduce la adunarea componentelor corespunzătoare, iar înmulțirea unui vector cu un număr real se reduce la înmulțirea componentelor vectorului cu acel număr.

Exemplul 7.1. Pentru

$$X = 2 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} + 7 \frac{\partial}{\partial y} \text{ si } k \in \mathbb{R},$$

găsim

$$X + Y = 3 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad kX = 2k \frac{\partial}{\partial x} - k \frac{\partial}{\partial y}.$$

Definiția 7.2.

Reuniunea $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ se numește spațiul tangent al lui M . O funcție

$$X : M \rightarrow \bigcup_{x \in M} T_x M, \quad X(x) \in T_x M$$

se numește câmp vectorial pe M .

Adunarea dintre două câmpuri vectoriale și produsul dintre o funcție reală și un câmp se definesc punctual.

Câmpurile vectoriale definite prin

$$x \rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x, \quad i = 1, \dots, n$$

și notate cu $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x$, $i = 1, \dots, n$ se numesc *câmpuri fundamentale*. Ansamblul lor se numește *reper natural*.

Teorema 7.2.

Dacă X este un câmp vectorial pe M atunci există n funcții reale $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, astfel încât $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Demonstrație. Prin definiție X asociază lui $x \in M$ un vector $X(x)$ tangent la M în punctul x . Dar $X(x) = X^i(x)$ și regulile $x \rightarrow X^i(x)$, $x \in M$ definesc (unic) funcțiile $X^i : M \rightarrow \mathbb{R}$. Funcțiile reale X^i se numesc componentele (coordonatele) câmpului vectorial X . Câmpul vectorial $X = X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ se numește diferențiabil (de clasă C^∞) dacă componentele sale sunt diferențiabile (de clasă C^∞).

Exemplul 7.2. $X(x, y) = 2x \frac{\partial}{\partial x} + e^y \frac{\partial}{\partial y}$ este un câmp vectorial de clasă C^∞ .

Alternativ, câmpul vectorial X poate fi privit ca fiind aplicația $X : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ cu proprietățile

$$X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$$

$$X(fg) = (X(f))g + fX(g),$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, iar $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Definiția 7.3.

Fie X și Y două câmpuri vectoriale diferențiabile de clasă C^∞ pe M . Câmpul vectorial $[X, Y]$ definit prin $f \rightarrow [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ se numește *croșetul câmpurilor* X și Y .

Evident $[X, Y] = -[Y, X]$. De asemenea pentru oricare trei câmpuri vectoriale diferențiabile X, Y, Z are loc *identitatea Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Mulțimea $\mathcal{X}(M)$ a tuturor câmpurilor vectoriale diferențiabile de clasă C^∞ pe M este un spațiu vectorial real infinit dimensional. Deoarece croșetul $[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ este biliniară peste câmpul numerelor reale, mulțimea $\mathcal{X}(M)$ este ceea ce se cheamă o algebră; croșetul fiind anticomutativ și verificând identitatea Jacobi, algebra $\mathcal{X}(M)$ se numește *algebra Lie*.

Fie $T_x M$ spațiul tangent la M în punctul x și ω_x o 1-formă în x , adică o transformare liniară $\omega_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$. Mulțimea tuturor 1-formelor în x este un spațiu vectorial real de dimensiune n , dualul lui $T_x M$. Acest spațiu vectorial se numește *spațiul cotangent* la M în x și se notează cu $T_x^* M$.

Definiția 7.4.

Fie $f \in \mathcal{F}(M)$. Funcția $df_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $df_x(X_x) = X_x(f)$ se numește *diferențiala lui f în punctul x* .

Această definiție împreună cu definiția vectorilor tangenți arată că df_x este o 1-formă în x .

Teorema 7.3.

Fie $x^j : M \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, funcțiile cu coordonate pe M . Mulțimea $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}_{x_0}$ este o bază a lui $T_{x_0}^* M$ (reper în punctul x_0).

Demonstrație. Evident $dx^j \mid i = 1, \dots, n$, aparțin lui $T_{x_0}^* M$.

Fie $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}_{x_0}$, reperul natural în $T_{x_0} M$. Ținând seama de definiția 7.6 deducem

$$dx^j \mid_{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0} = \frac{\partial}{\partial x^i} \mid_{x_0} (x^j) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \mid_{x_0} = \delta_i^j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

și deci $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}_{x_0}$ este o bază duală. Reperul $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}_{x_0}$ se numește *coreper natural* în x_0 .

Fie $X_x = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mid_x$. Rezultă $dx^j \mid_x (X_x) = a^i dx^j \mid_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x = a^j$. De asemenea orice 1-formă $\omega_x \in T_x^* M$ se scrie $\omega_x = \omega_j dx^j \mid_x$, ω_j fiind componentele lui ω_x în raport cu coreperul natural.

Rezultă $\omega_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \omega_i$, adică compnentele 1-formei ω_x sunt valorile lui ω_x pentru vectorii reperului natural în x .

Fie $\mathcal{F}(M)$ algebra funcțiilor reale diferențiabile pe M și $\mathcal{X}(M)$ algebra Lie a câmpurilor vectoriale diferențiabile pe M .

Definiția 7.5.

O funcție $\omega : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, $\mathcal{F}(M)$ -liniara, C^∞ -diferențială $\forall X \in \mathcal{X}(M)$, se numeste 1-formă diferențială pe M .

Adunarea a două 1-forme și produsul dintre o funcție reală și o 1-formă se definesc punctual.

Fie ω o 1-formă diferențială. Valorile ω_x sunt 1-forme în punctele $x \in M$. De aceea expresia locală a unei 1-forme diferențiale este $\omega_x = \omega_j(x) dx^j|_x$. Mai scurt, putem scrie $\omega = \omega_j dx^j$ deoarece 1-formele diferențiale $dx^1, \dots, dx^n$ sunt duale câmpurilor fundamentale $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$.

Ansamblul $\{dx^j, j = 1, \dots, n\}$ se numește coreper natural. Mulțimea tuturor 1-formelor diferențiale pe M va fi notată cu $X^*(M)$.

Precizarea 7.1.

X_x este un vector contravariant. X este un câmp vectorial contravariant; ω_x este un vector covariant, ω este un câmp vectorial covariant.

O mulțime ordonată $\{X_1, \dots, X_n\}$ de câmpuri vectoriale se numește repere pe M dacă $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$ este o bază în $T_x M$, $\forall x \in M$. Analog se definește coreperele $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$. Acestea se numesc duale unul altuia dacă $\omega^b(X_a) = \delta_a^b$. În general câmpurile de repere (sau de corepere) nu există decât pe o vecinătate a punctului x din M .

Dacă $\{X_a, a = 1, \dots, n\}$ sunt repere pe M , atunci orice alt câmp vectorial V se exprimă în forma $V = V^a X_a$. Analog, dacă $\{\omega^b \mid b = 1, \dots, n\}$ sunt corepere, atunci orice alta 1-formă diferențială η se exprimă în forma $\eta = \eta_b \omega^b$.

Fie x un punct din M caracterizat de două sisteme de coordonate $(x^i) = (x^1, \dots, x^n)$ și $(x^{i'}) = (x^{1'}, \dots, x^{n'})$. Schimbarea de coordonate, definită pe o vecinătate din M a lui x , se scrie $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ și admite inversa $x^i = x^i(x^{i'})$. Bazele $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_x$, $\{dx^i\}_x$ se schimbă în $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \right\}_x$, $\{dx^{i'}\}_x$ cu legăturile

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x^i) \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \Big|_x, \quad dx^j \Big|_x = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} dx^{j'} \Big|_x.$$

și

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \delta_{j'}^{i'}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \delta_j^i.$$

Dacă

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \quad \omega = \omega_i dx^i = \omega_{i'} dx^{i'},$$

atunci regulile de schimbare a componentelor câmpurilor vectoriale la o schimbare de coordonate sunt respectiv

$$X^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} X^i, \quad \omega_{j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \omega_j.$$

1.8. Câmpuri tensoriale

Noțiunea de tensor de tipul (p, q) pe spațiul vectorial $T_x M$ este cunoscută. Utilizând această noțiune introducem câmpurile tensoriale.

Definiția 8.1.

Fie $T_q^p(T_x M)$ mulțimea tuturor tensorilor de tipul (p, q) pe spațiul tangent $T_x M$. O funcție

$$T : M \rightarrow \bigcup_{x \in M} T_q^p(T_x M), \quad T(x) \in T_q^p(T_x M),$$

se numește câmp tensorial de tipul (p, q) pe M .

Fie $T_q^p(M)$ mulțimea tuturor câmpurilor tensoriale pe M de tipul (p, q) . Adunarea a două elemente din această mulțime ca și produsul dintre o funcție reală și un câmp vectorial se definesc punctual. Mulțimea $T_q^p(M)$ este un spațiu vectorial real infinit dimensional. Identificăm:

$$T_0^0(M) = \mathcal{F}(M), \quad T_0^1(M) = \mathcal{X}(M), \quad T_1^0(M) = \mathcal{X}^*(M).$$

Deoarece baza canonică în $T_q^p(T_x M)$ este

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \right\}_x,$$

expresia în coordonate a lui T este

$$T(x) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}.$$

Câmpul T se numește *diferențiabil* dacă funcțiile componente (coordoante) $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ sunt diferențiabile. Echivalent, un câmp tensorial de tipul (p, q) este o funcție

$$T : \underbrace{\mathcal{X}^*(M) \times \dots \times \mathcal{X}^*(M)}_{p \text{ factori}} \times \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_{q \text{ factori}} \rightarrow \mathcal{F}(M).$$

$$(\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q) \rightarrow (\omega^1, \dots, \omega^p, X_1, \dots, X_q),$$

$\mathcal{F}(M)$ -liniară în fiecare argument. Identificarea $T_0^1(M) = \mathcal{X}(M)$ impune definiția $(\omega) = \omega(X)$, $X \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \mathcal{X}^*(M)$. Definițiile câmpurilor tensoriale *simetrice* respectiv

antisimetrice ca și definițiile *produsului tensorial* și *contracției* pentru câmpurile tensoriale sunt evidente.

Fie $\delta_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ componentele câmpului tensorial S , $T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ componentele câmpului tensorial T și fie $f \in \mathcal{F}(M)$. Componentele câmpurilor fS , $S + T$, și $S \otimes T$ sunt respectiv

$$fS_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}, \quad S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} + T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}, \quad S_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} T_{l_1, \dots, l_q}^{k_1, \dots, k_p}.$$

Fie x un punct din M caracterizat pe de o parte prin coordonatele $\{x^1, \dots, x^n\}$, iar pe de altă parte prin coordonatele $\{x^{i'}, \dots, x^{n'}\} = (x^{i'})$, schimbarea de coordonate fiind $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ cu inversa $x^i = x^i(x^{i'})$, pe o vecinătate a lui x conținută în M . Baza $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}_x$ se schimbă în $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right\}_x$ cu legatura $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x^i) \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\Big|_x$; corespunzător baza duală se schimbă în $\{dx^{j'}\}_x$ cu legatura $dx^j\Big|_x = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(x^{j'}) dx^{j'}\Big|_x$. Evident,

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = \delta_{j'}^{i'}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \delta_j^i.$$

corespunzător

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^{i'_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i'_p}} \otimes dx^{j'_1} \otimes \dots \otimes dx^{j'_p} = \\ & = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{j'_p}}{\partial x^{j_p}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_p}. \end{aligned}$$

Aceasta implică regula de schimbare a componentelor unui câmp tensorial de tipul (p, q) la o schimbare de coordonate,

$$T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

1.9. Conexiunea liniară

Definiția 9.1.

O funcție $D : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, $(X, Y) \rightarrow D_X Y$ cu proprietățile

$$\begin{cases} D_{fX+gY}Z = fD_X Z + gD_Y Z \\ D_X(aY + bZ) = aD_X Y + bD_X Z \\ D_X(fY) = X(f)Y + fD_X Y \end{cases} \quad (9.1)$$

se numește *conexiune liniară* sau *derivare covariantă* pe M .

Fie D o conexiune liniară pe M . Funcțiile reale $\Gamma_{ij}^h : M \rightarrow \mathbb{R}$, $h, i, j = 1, \dots, n$, definite prin

$$D \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

se numesc componentele conexiunii D . Aceste n^3 funcții reale determină unic pe $D_X Y$. Într-adevăr, dacă $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, atunci

$$\begin{aligned} D_X Y &= D_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i D \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j D \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \Gamma_{ij}^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right) X^i = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^h Y^h \right) X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = Y_i^j X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

O conexiune D determină următoarele două câmpuri tensoriale:

1). Unul de tipul (1,2),

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), \quad T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y],$$

numit câmpul tensorial de torsiune;

2). Altul de tipul (1,3),

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

$$R(X, Y)Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]}Z,$$

numit câmpul tensorial de curbura.

Coordonatele lui T și R în raport cu bazele canonice sunt respectiv

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i,$$

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{ki}^h}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{ki}^r \Gamma_{jr}^h - \Gamma_{ji}^r \Gamma_{kr}^h.$$

Conexiunea liniară D se numește simetrică dacă $T = 0$ sau echivalent $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$.

La o schimbare a bazei în punctul x , componentele conexiunii se schimbă după legea

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} = -\Gamma_{j'k'}^{i'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^h \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^h}.$$

Fie D o conexiune liniară pe M și $X \in \mathcal{X}(M)$. Conexiunea liniară D induce derivarea covariantă în raport cu X , notată D_X care aplică pe $T_q^p(M)$ în el însuși. Operatorul D_X se definește prin $D_X f = X(f)$, pentru $f \in \mathcal{F}(M)$, iar $D_X T$ este produs de derivarea covariantă folosind conexiunea de pe M , mai exact

$$(D_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(D_X Y), \quad \omega \in T_1^0(M),$$

iar

$$(D_X T)(\omega^1, \dots, \omega^p, Y^1, \dots, Y_q) = X(T(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q)) - \\ - T(D_X \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, Y_q) - \dots - T(\omega^1, \dots, \omega^p, Y_1, \dots, D_X Y_q), \quad T \in T_q^p(M).$$

Se verifică relația

$$D_X(S \otimes T) = D_X S \otimes T + S \otimes D_X T, \quad \forall S, T.$$

Dacă $D_X T = 0, \forall X \in \mathcal{X}(M)$, atunci T se numește câmp tensorial paralel în raport cu conexiunea liniară D . Operatorul D_X induce un operator general de derivare covariantă care aplică pe $T_q^p(M)$ în T_{q+1}^p . Acesta comută cu contracția. Iată câteva reguli de derivare covariantă pe componente :

$$Y_i^j = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ih}^j Y^h, \quad \omega_{j,i} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^h \omega_h, \\ T_{jk}^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kh}^i T_j^h - \Gamma_{kj}^h T_h^i, \quad (Y^i \omega_j)_k = Y_k^i \omega_j + Y^i \omega_{j,k}$$

1.10. Metrice riemanniene

Reamintim că un produs scalar pe $T_x M$ se numește metrice riemanniană pe $T_x M$.

Definiția 10.1.

Un câmp tensorial g de tipul $(0, 2)$ pe M cu proprietatea că pentru fiecare $x \in M$ tensorul $g(x)$ este o metrice Riemanniană pe $T_x M$ se numește câmp tensorial metric sau metrice Riemanniană pe M . Perechea (M, g) se numește varietate Riemannă. Fie X și Y două câmpuri vectoriale pe M . Cu ajutorul lui g putem defini produsul scalar $g(X, Y)$, norma $\|X\|^2 = g(X, X)$, și unghiul (dacă X și Y nu au zerouri pe M) $\cos \theta = \frac{g(X, Y)}{\|X\| \|Y\|}, \quad \theta \in [0, \pi]$.

De asemenea metrice Riemanniană g induce un produs scalar, o normă, un unghi pe $T_q^p(M)$, precum și operațiile de ridicare și coborare a indicilor pentru orice câmp tensorial pe M . Un câmp de repere local $\{X_1, \dots, X_n\}$ pe M se numește ortonormat dacă $g(X_a, X_b) = \delta_{ab}$, adică $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$ este o bază ortonormată în $T_x M, \quad \forall x \in M$.

Local, avem exprimarea $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, unde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$. De asemenea, reamintim că dacă coordonatele (x^i) ale punctului x se schimbă în $(x^{i'})$, atunci funcțiile g_{ij} se schimbă după legea (locală)

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}.$$

Teorema 10.1. Pe spațiul Riemannian (M, g) există o singură conexiune liniară simetrică D cu proprietatea $D_X(g(Y, Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Demonstrație. Mai întâi observăm că relația din teoremă este echivalentă cu $D_X g = 0$, $\forall X \in \mathcal{X}$, adică cu faptul că g este un câmp tensorial paralel în raport cu D . Pentru simplificarea demonstrației vom lucra direct pe componente; fie g_{ij} componentele lui g și Γ_{ij}^h componentele lui D . Din ipoteză

$$\Gamma_{ij}^h = \Gamma_{ji}^h, \quad g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^h g_{hj} - \Gamma_{kj}^h g_{hi} = 0$$

rezultă

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2g_{hk} \Gamma_{ij}^h$$

și deci

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Astfel conexiunea Riemanniană este caracterizată prin simbolurile Christoffel.

Exemple de metrice Riemanniene :

Exemplul 10.1. Metrica uzuală pe $\mathbb{R}^n$, $g(X_x, Y_x) = (X_x, Y_x)$ produsul scalar canonic; $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$.

Exemplul 10.2. Metrica stereografică pe R^n ,

$$g(X_x, Y_x) = \frac{4}{(1+k\|x\|^2)^2} \langle X_x, Y_x \rangle, \quad k \geq 0; \quad g_{ij}(x) = \frac{4}{(1+k\|x\|^2)^2} \delta_{ij}.$$

Exemplul 10.3. Metrica pe o bilă deschisă,

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 < \frac{1}{-k}, \quad k < 0 \right\}, \quad g(X_x, Y_x) = \frac{4}{(1+k\|x\|^2)^2} (X_x, Y_x);$$

$$g_{ij}(x) = \frac{4}{(1+k\|x\|^2)^2} \delta_{ij}.$$

Exemplul 10.4. Metrica Poincaré pe semiplanul superior,

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y > 0\}; \quad g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2} \delta_{ij}.$$

Facem precizarea că în unele lucrări, metrica este dată prin pătratul elementului de arc, $dx^2 = g_{ij} dx^i dx^j$.

Fie $g_{ij} = \delta_{ij}$ metrica uzuală pe $M = \mathbb{R}^n$ și (x^i) coordonatele euclidiene (sistem de coordonate) ale punctului $x \in \mathbb{R}^n$. În acest caz, pentru orice câmp tensorial, coordonatele covariante, mixte sau contravariante coincid. În particular pentru un câmp vectorial

coordonatele contravariante coincid cu cele covariante și cu cele obișnuite din geometria analitică elementară numite deseori coordonate fizice.

Presupunem că de la coordonatele euclidiene (x^i) trecem la alte coordonate $(x^{i'})$, tot ale punctului x . Rezultă

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Sistemul de coordonate $(x^{i'})$ se numește ortogonal dacă $g_{i'j'} = 0$ pentru $i' \neq j'$. În acest caz $g_{i'i'} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ și funcțiile $h_{i'} = \sqrt{g_{i'i'}}$, $i' = 1, \dots, n$, se numesc coeficienții Lamé.

Fixam un sistem de coordonate $(x^{i'})$ ortogonal. Fie câmpul vectorial $X = X^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$. Coordonatele covariante ale lui X sunt

$$X_{j'} = \sum_{i'}^{n'} g_{i'j'} X^{i'} = h_{j'}^2 X^{j'}$$

fară sumare după j' . Pe de altă parte observăm că ansamblul format din câmpurile vectoriale

$$t_{i'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad i' = 1, \dots, n,$$

este un câmp de repere pe $\mathbb{R}^n$. Ortonormând acest câmp de repere în raport cu metrica uzuală, obținem

$$e_{1'} = \frac{1}{h_{1'}} t_{1'}, \dots, e_{n'} = \frac{1}{h_{n'}} t_{n'}.$$

Cu aceasta, obținem exprimarea

$$X = X^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = X^{i'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j} = X^{1'} t_{1'}, \dots, X^{n'} t_{n'} = (h_{1'} X^{1'}) e_{1'} + \dots + (h_{n'} X^{n'}) e_{n'},$$

coordonatele

$$X_{x^{1'}} = h_{1'} X^{1'}, \dots, X_{x^{n'}} = h_{n'} X^{n'}$$

numindu-se componente (coordonate) fizice ale câmpului vectorial X .

1.11. Operatori diferențiali pe o varietate riemanniană

Fie (M, g) o varietate Riemanniană, fie $\mathcal{F}(M)$ algebra funcțiilor diferențiale de clasă C^∞ pe M și $\mathcal{X}(M)$ algebra Lie a câmpurilor vectoriale diferențilabile de clasă C^∞ pe M .

1.11.1. Gradientul

Fie $f \in \mathcal{F}(M)$. Câmpul vectorial $\text{grad } f$ definit prin

$$g(X, \text{grad } f) = X(f) = df(X), \quad \forall X \in \mathcal{X}(M)$$

se numește gradientul lui f .

În coordonate,

$$\text{grad } f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}; \quad (\text{grad } f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Din definiție se observă că $\text{grad } f$ este ortogonal hipersuprafețelor de nivel constant atașate lui f . Se verifică următoarele relații

$$\text{grad}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \text{grad } f_1 + a_2 \text{grad } f_2$$

$$\text{grad}(f_1 f_2) = f_1 \text{grad } f_2 + f_2 \text{grad } f_1$$

$$\text{grad } \frac{f_1}{f_2} = \frac{f_2 \text{grad } f_1 - f_1 \text{grad } f_2}{f_2^2}.$$

$$\text{Demonstrație. } g(X, \text{grad}(f_1 f_2)) = X(f_1 f_2) = f_1 X(f_2) + f_2 X(f_1) =$$

$$= f_1 g(X, \text{grad } f_2) + f_2 g(X, \text{grad } f_1) = g(X, f_1 \text{grad } f_2 + f_2 \text{grad } f_1), \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Rezultă $\text{grad}(f_1 f_2) = f_1 \text{grad } f_2 + f_2 \text{grad } f_1$.

Operatorul $\text{grad} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ definit prin $f \rightarrow \text{grad } f$ se numește *gradient*.

1.11.2. Hessiana

Fie $f \in \mathcal{F}(M)$. A doua derivată covariantă a lui f în raport cu conexiunea riemanniană se numește hessiana lui f și se notează prin $\text{Hess } f$. Alternativ, hessiana este câmpul tensorial de tipul $(0,2)$ definit prin

$$\text{Hess } f(X, Y) = D_X(df)(Y) = X(df(Y)) - df(D_X Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

În coordonate,

$$\text{Hess } f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{jk}^h \frac{\partial f}{\partial x^h} \right) dx^j \otimes dx^k, \quad (\text{Hess } f)_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma_{jk}^h \frac{\partial f}{\partial x^h}.$$

Operatorul Hess : $\mathcal{F}(M) \rightarrow T_2^0(M)$ definit prin $f \rightarrow \text{Hess } f$ se numește *hessiană*

1.11.3. Divergența

Fie $X \in \mathcal{X}(M)$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ și derivata sa covariantă X_j^i în raport cu conexiunea riemanniană. Câmpul scalar $\text{div } X$ definit prin contracția $\text{div } X = X_i^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^i X^j$ se numește *divergența* lui X .

Fie $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Dacă notăm $G = \det[g_{ij}]$, atunci

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G} X^i)}{\partial x^i} \text{ cu suma după } i.$$

Într-adevăr, se observă că

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$$

și ținând seama de regula de derivare a unui determinant,

$$\frac{\partial G}{\partial x^j} = \frac{\partial G}{\partial g_{ik}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = G g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j},$$

deducem

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j}.$$

Deci

$$\text{div } X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j} X^j = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G} X^i)}{\partial x^i}.$$

Această expresie a divergenței este des utilizată și permite dovedirea imediată a relației

$$\text{div}(fX) = X(f) + f \text{div } X, \quad f \in \mathcal{F}(M), \quad \forall X \in \mathcal{X}(M).$$

Operatorul $\text{div} : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ definit prin $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow X_{,i}^i$, se numește *divergență*.

1.11.4. Laplacianul

Operatorul Δ definit prin $\Delta f = \text{div}(\text{grad}) f$ se numește *laplacian*. Explicit

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{G} g^{ki} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) = g^{ki} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^h} \Gamma_{kl}^h \right),$$

adică Δ este urma hessianei.

1.11.5. Rotorul

Fie câmpul vectorial $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ și $\omega = g_{ij} X^i dx^j$, $\omega_j = g_{ij} X^i$, 1-forma diferențială asociată. Câmpul tensorial $\text{rot } X$ de tipul $(0,2)$ definit prin

$$\text{rot } X = (\omega_{j,i} - \omega_{i,j}) dx^i \otimes dx^j = \left(\partial \left(g_{hj}^h \right) \partial x^i - \partial \left(g_{hi}^h \right) \partial x^j \right) dx^i \otimes dx^j$$

se numește rotorul lui X . Operatorul $\text{rot} : \mathcal{X}(M) \rightarrow T_2^0(M)$, $X \rightarrow \text{rot } X$, se numește rotor.

Se dovedește că dacă $M \subset \mathbb{R}^3$, atunci câmpul tensorial $\text{rot } X$ este echivalent cu un câmp vectorial contravariant definit prin componentele

$$(\text{rot } X)^i = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\partial \left(g_{hk}^h \right) \partial x^j - \partial \left(g_{hj}^h \right) \partial x^k \right),$$

unde $\{i, j, k\}$ este o permutare ciclică a mulțimii $\{1, 2, 3\}$. Tot în acest context se verifică și relațiile

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } X) &= \text{grad}(\text{div } X) - \Delta X \\ \text{div}(\text{rot } X) &= 0. \end{aligned}$$

1.12. Forme alternate

Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune n .

Definiția 12.1.

O q -formă sau formă alternată de ordinul q pe V este o funcție

$$\omega : \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{q \text{ factori}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (v_1, \dots, v_q) \rightarrow \omega(v_1, \dots, v_q)$$

care satisface următoarele condiții :

- 1). multilineară: pentru fiecare $i \in \{1, \dots, q\}$ și $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_q \in V$, restricția $v \rightarrow \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_q)$ este liniară.
- 2). antisimetrică: pentru fiecare $v_1, \dots, v_q \in V$ și pentru fiecare permutare σ a mulțimii $\{1, \dots, q\}$ se satisface $(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = (\text{sign } \sigma) \omega(v_1, \dots, v_q)$.

Cu alte cuvinte, o q -forma pe V nu este altceva decât un tensor antisimetric de tipul $(0, q)$ pe V . Multimea tuturor q -formelor pe V se notează cu $\mathcal{F}_q(V)$ și este un spațiu vectorial real cu

$$\dim \mathcal{F}_q(V) = \begin{cases} C_n^q & \text{daca } 0 \leq q \leq n \\ 0 & \text{daca } q > n \end{cases}.$$

Evident, $\mathcal{F}_0(V) = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_1(V) = V^*$.

Definiția 12.2.

Fie $\mathcal{F}_p(V)$, $\mathcal{F}_q(V)$, $\mathcal{F}_{p+q}(V)$. Funcția $\Delta : \mathcal{F}_p(V) \times \mathcal{F}_q(V) \rightarrow \mathcal{F}_{p+q}(V)$ definită prin

$$(\omega^1 \wedge \omega^2)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} (\text{sign } \sigma) \omega^1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \omega^2(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}),$$

suma fiind luată după toate permutările σ ale lui $\{1, \dots, p+q\}$, se numește produs exterior.

Se observă ca produsul exterior este o aplicație biliniară asociativă. Asociativitatea permite extinderea definiției produsului exterior la un număr finit de factori.

Evident,

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = (-1)^{pq} \omega^2 \wedge \omega^1.$$

Teorema 12.1.

Dacă $\{e_j, j = 1, \dots, n\}$ este o bază a lui V și $\{e^i, i = 1, \dots, n\}$ este baza sa duală în V^* , atunci mulțimea $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}, 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n\}$ este o bază a lui $\mathcal{F}_q(V)$, numită baza produs.

Demonstrație. Mulțimea din teoremă este liniar independentă. Într-adevăr, relația

$$\sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} = 0 \quad (q\text{-forma nulă}),$$

implică

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} (e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} \sum_{\sigma} (\text{sign } \sigma) e^{i_1}(e_{\sigma(j_1)}) \dots e^{i_q}(e_{\sigma(j_q)}) = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_q} \omega_{i_1 \dots i_q} \sum_{\sigma} (\sigma) \delta_{\sigma(j_1)}^{i_1} \dots \delta_{\sigma(j_q)}^{i_q} = \omega_{j_q \dots j_q}, \end{aligned}$$

unde $j_q < \dots < j_q$.

Să aratăm că mulțimea din teoremă sau mai general mulțimea $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q}, i_1, \dots, i_q = 1, \dots, n\}$ generează pe $\mathcal{F}_q(V)$. Pentru aceasta, fie $\omega \in \mathcal{F}_q(V)$ și numerele reale $\omega_{i_1 \dots i_q} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_q})$.

Găsim

$$\omega_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} (e_{j_1}, \dots, e_{j_q}) = \omega_{i_1 \dots i_q} \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} (\text{sign } \sigma) e^{i_1}(e_{\sigma(j_1)}) \dots e^{i_q}(e_{\sigma(j_q)}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \omega_{i_1 \dots i_q} \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} (\text{sign } \sigma) e^{i_1} (e_{\sigma(j_1)} e_{\sigma(j_2)} \dots e_{\sigma(j_q)}) = \frac{1}{q!} \omega_{i_1 \dots i_q} \sum_{\sigma} (\text{sign } \sigma) \delta_{\sigma(j_1)}^{i_1} \delta_{\sigma(j_2)}^{i_2} \dots \delta_{\sigma(j_q)}^{i_q} = \omega_{j_1 \dots j_q} = \\
&= \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_q}).
\end{aligned}$$

Deoarece ω este multiliniară, ultima relație implică

$$\omega_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} (v_1, \dots, v_q) = \omega(v_1, \dots, v_q).$$

Deci

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_q} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_q} = \sum_{j_1 < \dots < j_q} \omega_{j_1 \dots j_q} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_q},$$

unde numerele reale $\omega_{j_1 \dots j_q}$, $j_1 < \dots < j_q$, sunt coordonatele stricte ale q -forme ω .

1.13. Forme diferențiale alternate

Fie M o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$, $T_x M$ spațiul tangent la M în punctul x și $\mathcal{F}_q(T_x M)$ mulțimea tuturor q -formelor pe $T_x M$.

Definiția 13.1.

O funcție $\omega : M \rightarrow U_{x \in M} \mathcal{F}_q(T_x M)$, $\omega(x) \in \mathcal{F}_q(T_x M)$, se numește q -formă diferențială sau formă diferențială de ordinul q pe M .

Cu alte cuvinte, o q -formă diferențială este un câmp tensorial antisimetric de tipul $(0,2)$ pe M . Fie $\mathcal{F}_q M$ mulțimea tuturor q -formelor diferențiale pe M . Adunarea a două elemente din această mulțime ca și produsul dintre o funcție reală și o q -forma se definesc punctual.

Fie $T_x^* M$ dualul spațiului tangent. Baza canonică în $T_x^* M$ este

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \dots, n \right\}_x,$$

iar duala sa, baza în $T_x^* M$, este $\{dx^i, i = 1, \dots, n\}_x$. Baza indusă în $\mathcal{F}_q M$ este

$$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, 1 \leq i_1 < \dots < i_q \leq n\}_x.$$

Folosind sistemul de generatori $\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}\}$, expresia în coordonate a lui ω este

$$\omega(x) = \omega_{i_1 \dots i_q}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}.$$

Funcțiile $x \rightarrow \omega_{i_1 \dots i_q}(x)$ se presupun diferențiabile de clasă C^∞ pe M .

Fie $\mathcal{F}(M)$ algebra funcțiilor reale și $\mathcal{X}(M)$ algebra Lie a câmpurilor vectoriale. O q -forma diferențială pe M poate fi privită ca fiind o funcție

$$\omega : \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M), (X_1, \dots, X_q) \rightarrow \omega(X_1, \dots, X_q),$$

$\mathcal{F}(M)$ -liniară în fiecare argument și cu proprietatea

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(q)}) = (\text{sign } \sigma) \omega(X_1, \dots, X_q)$$

unde σ este o permutare a mulțimii $\{1, \dots, q\}$.

Definiția produsului exterior pentru q -forme diferențiale este evidentă.

Fie $X \in \mathcal{X}(M)$ și $\omega \in \mathcal{F}_q(M)$. Prin *contractia* dintre X și ω înțelegem o $(q-1)$ -formă diferențială $X \lrcorner \omega$ definită prin

$$(X \lrcorner \omega)(X_1, \dots, X_{q-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{q-1}), \quad X_1, \dots, X_{q-1} \in \mathcal{X}(M).$$

Definiția 13.2.

Fie $\mathcal{F}_q(M)$ și $\mathcal{F}_{q+1}(M)$. O funcție $\mathbb{R}$ -liniară $d : \mathcal{F}_q(M) \rightarrow \mathcal{F}_{q+1}(M)$ cu proprietățile

- 1). $d^2 = 0$
- 2). $d(\omega^1 \wedge \omega^2) = d\omega^1 \wedge \omega^2 + (-1)^q \omega^1 \wedge d\omega^2$
- 3). $X(d\omega) = d(X(\omega)), \quad \forall X \in \mathcal{X}(M)$
- 4). $X(\omega) = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega)$

se numește *diferențială exterioară*.

Utilizând derivata covariantă și croșetul putem scrie:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{q+1}) &= \sum_{1 \leq i \leq q+1} (-1)^{i-1} D_{X_i} \omega(X_1, \dots, X_{i-1}, \dots, X_{q+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq j \leq q+1} (-1)^{i+1} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, \dots, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, \dots, X_{j+1}, \dots, X_{q+1}). \end{aligned}$$

Pe $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}_0(M)$ diferențiala exterioară se reduce la diferențiala obișnuită. Mai mult,

$$d\omega(x) = d\omega_{i_1 \dots i_q}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}.$$

O q -formă diferențială ω cu proprietatea $d\omega = 0$ se numește *formă închisă*. O $(q+1)$ -formă diferențială η cu proprietatea că există o q -formă ω astfel încât $\eta = d\omega$ se numește *exactă*.

Observația 13.1.

Mulțimea deschisă M poate fi înlocuită cu orice subvarietate de dimensiune $m \leq 1$, cu sau fără frontieră, a lui $\mathbb{R}^n$.

Observația 13.2.

Fie M o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$, de dimensiune m , cu sau fără frontieră. O formă volum pe M este o m -formă diferențială ω pe M cu proprietatea $\omega(v_1, \dots, v_m) = \pm 1$ ori de câte ori $v_1, \dots, v_m$ este o bază ortonormată a lui $T_x(M)$.

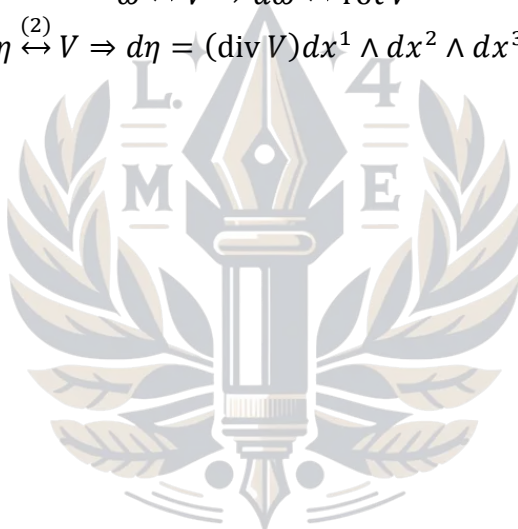
O alegere a unei forme volum ω pe M se numește orientare a lui M ; despre M se zice că este orientată.

Fie M o subvarietate de dimensiune $m \geq 2$, cu frontieră. O orientare pe M induce o orientare pe ∂M .

Observația 13.3.

În $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$, 1-formele și 2-formele pot fi convertite în câmpuri vectoriale prin corespondențele:

$$\begin{aligned} \sum f_i dx^i &\stackrel{(1)}{\leftrightarrow} \sum f_i U_i \stackrel{(2)}{\leftrightarrow} f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2 \\ df &\stackrel{(1)}{\leftrightarrow} \text{grad } f \\ \omega &\stackrel{(1)}{\leftrightarrow} V \Rightarrow d\omega \stackrel{(2)}{\leftrightarrow} \text{rot } V \\ \eta &\stackrel{(2)}{\leftrightarrow} V \Rightarrow d\eta = (\text{div } V) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$



Capitolul 2.

Electromagnetismul și relativitatea specială

Din punct de vedere istoric, ecuațiile lui Maxwell au fost descoperite înainte de teoria relativității speciale. Se credea că undele de lumină trebuie să fie oscilații ale unei substanțe care umple tot spațiul. Aceasta a fost numită eterul. Ideea era că ecuațiile lui Maxwell sunt valabile doar într-un sistem în care eterul este în repaus; atunci lumina ar trebui să se deplaseze cu viteza c în raport cu eterul.

Acum știm că conceptul de eter este un bagaj inutil. În schimb, ecuațiile lui Maxwell sunt valabile în toate sistemele inerțiale și sunt primele ecuații ale fizicii care sunt compatibile cu legile relativității speciale. În cele din urmă, prin studierea ecuațiilor lui Maxwell, Lorentz a putut să determine forma transformărilor Lorentz care au pus ulterior baza pentru viziunea lui Einstein asupra spațiului și timpului.

Scopul nostru în această secțiune este de a vedea electromagnetismul prin prisma relativității speciale. Vom vedea că observatori din sisteme de referință diferite nu vor fi de acord cu ceea ce numesc câmpuri electrice și ceea ce numesc câmpuri magnetice. Vor observa densități de sarcină și curenți diferiți, dar toți vor fi de acord că acestea sunt legate de aceleași ecuații ale lui Maxwell.

2.1. Relativitatea specială

Relativitatea restrânsă este teoria fizică a măsurării în sistemele de referință inerțiale (SRI) propusă în 1905 de către Albert Einstein în articolul său *Despre electrodinamica corpurilor în mișcare* [2]. Aceasta este bazată pe două postulate:

- 1) *Primul postulat - Principiul relativității restrânse - Legile fizicii sunt aceleași în orice sistem de referință inerțial. Cu alte cuvinte, nu există sistem de referință inerțial privilegiat.*

Acest postulat dă naștere unui set triplu de sisteme de referință inerțiale ce se deplasează cu viteze constante unul în raport cu altul, în care ecuațiile diferențiale care descriu legile fizice iau aceeași formă în toate sistemele inerțiale.

- 2) *Al doilea postulat - Invarianța lui c - Viteza luminii în vid este constantă pentru toate SRI în toate direcțiile și nu depinde nici de viteza sursei, nici de viteza observatorului.*

Acesta implică faptul că c are aceeași valoare constantă în toate sistemele inerțiale. Transformările între sistemele inerțiale sunt implicate, care au consecințe fizice foarte importante.

Relativitatea restrânsă modifică noțiunile newtoniene de spațiu și timp afirmând că timpul și spațiul sunt percepute diferit în sensul că măsurătorile privind lungimea și intervalele de timp depind de starea de mișcare a observatorului. Rezultă de aici echivalența dintre materie și energie, exprimată în formula de echivalență a masei și energiei $E = mc^2$, unde c este viteza luminii în vid. Relativitatea restrânsă este o generalizare a mecanicii newtoniene, aceasta din urmă fiind o aproximație a relativității restrânse pentru experimente în care vitezele sunt mici în comparație cu viteza luminii.

Deși teoria relativității restrânse face anumite cantități relative, cum ar fi timpul, pe care ni l-am fi imaginat ca fiind absolut, pe baza experienței de zi cu zi, face absolute unele cantități pe care le-am fi crezut altfel relative. În particular, se spune în teoria relativității că viteza luminii are aceeași valoare pentru toți observatorii, chiar dacă ei sunt în mișcare unul în raport cu celălalt. Relativitatea restrânsă dezvăluie faptul că c nu este doar viteza unui anumit fenomen - propagarea luminii - ci o trăsătură fundamentală a felului în care sunt legate între ele spațiul și timpul. În particular, relativitatea restrânsă afirmă că este imposibil ca un obiect material să fie accelerat până la viteza luminii.

Teoria a fost numită "restrânsă" deoarece aplică principiul relativității doar la sisteme inerțiale. Einstein a dezvoltat relativitatea generalizată care aplică principiul general oricărui sistem de referință, iar acea teorie include și efectele gravitației. Relativitatea restrânsă nu ține cont de gravitație, dar tratează accelerația.

Această teorie are o serie de consecințe surprinzătoare și contraintuitive, dar care au fost de atunci verificate pe cale experimentală. Einstein a spus că toate consecințele relativității restrânse pot fi derivate din examinarea transformărilor Lorentz.

Aceste transformări, și deci teoria relativității restrânse, a condus la predicții fizice diferite de cele date de mecanica newtoniană atunci când vitezele relative se apropie de viteza luminii. Viteza luminii este atât de mult mai mare decât orice viteză întâlnită de oameni încât unele efecte ale relativității sunt la început contraintuitive:

- *Dilatarea temporală* - timpul scurs între două evenimente nu este invariant de la un observator la altul, dar el depinde de mișcarea relativă a sistemelor de referință ale observatorilor (ca în paradoxul gemenilor care implică plecarea unui frate geamăn cu o navă spațială care se deplasează cu o viteză aproape de cea a luminii și faptul că la întoarcere constată că fratele său geamăn a îmbătrânit mai mult).
- *Relativitatea simultaneității* - două evenimente ce au loc în două locații diferite, care au loc simultan pentru un observator, ar putea apărea ca având loc la momente diferite pentru un alt observator (lipsa simultaneității absolute).
- *Contrația Lorentz* - dimensiunile (de exemplu lungimea) unui obiect măsurate de un observator pot fi mai mici decât rezultatele aceluiași măsurători efectuate de un alt observator (de exemplu, paradoxul scării implică o scară lungă care se deplasează cu viteză apropiată de cea a luminii și ținută într-un garaj mai mic).
- *Compunerea vitezelor* - vitezele nu se adună pur și simplu, de exemplu dacă o rachetă se mișcă la $\frac{2}{3}$ din viteza luminii pentru un observator, și din ea pleacă o altă rachetă la $\frac{2}{3}$ din viteza luminii relativ la racheta inițială, a doua rachetă nu depășește viteza luminii în raport cu observatorul. (În acest exemplu, observatorul vede racheta a doua ca deplasându-se cu $\frac{12}{13}$ din viteza luminii.)
- *Inerția și impulsul* - când viteza unui obiect se apropie de cea a luminii din punctul de vedere al unui observator, masa obiectului pare să crească făcând astfel mai dificilă accelerarea sa în sistemul de referință al observatorului.
- *Echivalența masei și energiei*, $E = mc^2$ - Energia înmagazinată de un obiect în repaus cu masa m este egală cu mc^2 . Conservarea energiei implică faptul că în orice reacție, o scădere a sumei maselor particulelor trebuie să fie însoțită de o creștere a

energiilor cinetice ale particulelor după reacție. Similar, masa unui obiect poate fi mărită prin absorbția de către acesta de energie cinetică.

2.1.1. Transformările Lorentz

Postulatele teoriei relativității restrânse a lui Einstein pot fi exprimate în limbaj matematic sub formă de ecuații, care leagă coordonatele de poziție și timpul unui eveniment fizic E în două sisteme de referință inerțiale (SRI), S și S' , unde S' este în mișcare relativă cu viteza $\vec{v}$ constantă în raport cu sistemul S . (Fig. 2.1).

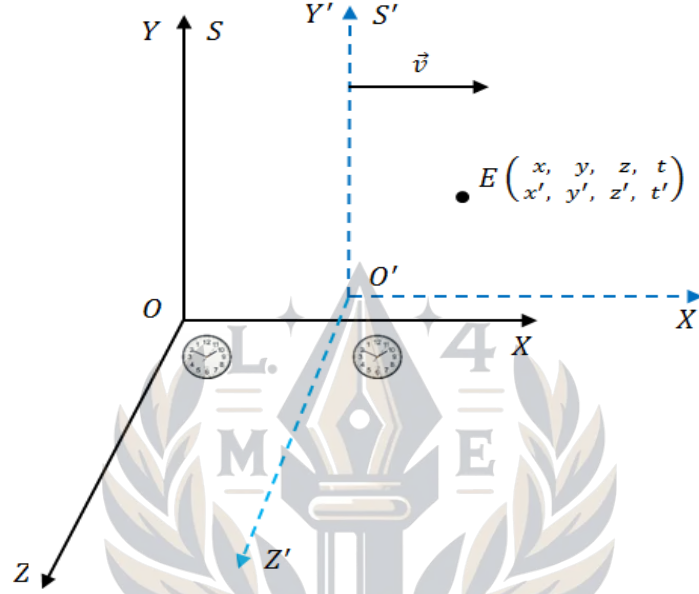


Fig. 2.1 Transformările Lorentz. Sistemul S' în mișcare relativă cu viteza $\vec{v}$ constantă în raport cu sistemul S .

Pentru simplitate, admitem că în momentul inițial originile O și O' ale sistemelor de coordonate rectangulare $S \equiv OXYZ$ și $S' \equiv O'X'Y'Z'$ coincid, iar S' se deplasează cu viteza relativă v în raport cu S de-a lungul axei X (axele OX și $O'X'$ sunt orientate în sensul vitezei $\vec{v}$). Notăm coordonatele și timpul măsurat de observatorii din S și S' prin t, x, y, z , și, respectiv, t', x', y', z' . Pornind de la postulatele sale, Einstein deduce următoarele relații între coordonatele spațio-temporale:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \\ x = \gamma (x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}, \quad (2.2)$$

unde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ este factorul Lorentz, v este viteza relativă a lui S' în raport cu S , și c este viteza luminii care are valoarea $c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$.

Aceste sisteme de ecuații poartă numele de *transformările lui Lorentz*, deoarece ecuațiile au fost obținute de fizicianul olandez H. Lorentz înainte de Einstein, pornind de la alte considerente.

Primul sistem de ecuații (2.1) reprezintă timpul și coordonatele unui eveniment din sistemul S' în funcție de coordonatele aceluiasi eveniment din S .

Al doilea sistem de ecuații (2.2) reprezintă timpul și coordonatele unui eveniment din sistemul S în funcție de coordonatele aceluiasi eveniment din S' .

Remarcăm că atunci când $v \ll c$, raportul $v/c \ll 1$, rădăcina $\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1$ și transformările lui Lorentz se reduc la transformările cunoscute ale lui Galileo:

Transformările de la S la S' :

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Transformările de la S' la S :

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Acest rezultat denotă un principiu fundamental al fizicii - *principiul corespondenței*, conform căruia orice teorie mai generală cuprinde vechea teorie ca un caz particular, punându-i în evidență limitele de valabilitate. Deci, mecanica newtoniană poate fi aplicată ca o teorie suficient de exactă în domeniul vitezelor mici în raport cu viteza luminii.

Transformările Lorentz au două consecințe imediate : dilatarea timpului și contracția lungimilor.

- **Dilatarea timpului**

Fie două evenimente care au loc în sistemul mobil S' în punctele cu coordonatele x'_1 și x'_2 , la momentele t'_1 și t'_2 . Se pune întrebarea: care este intervalul de timp dintre aceste evenimente, măsurat în sistemul de referință fix?

Din (2.2) avem:

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1 \right),$$

$$t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2 \right),$$

de unde rezultă că

$$t_2 - t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{v}{c^2} x'_1 \right) - \gamma \left(t'_2 + \frac{v}{c^2} x'_2 \right) = \gamma (t'_2 - t'_1) + \gamma \frac{v}{c^2} (x'_2 - x'_1).$$

Observație: Intervalul de timp măsurat în sistemul fix S depinde nu numai de timpul $t'_2 - t'_1$, măsurat în sistemul mobil S' , ci și de distanța $x'_2 - x'_1$ dintre evenimente. În teoria relativității restrânse (TRR), timpul și spațiul sunt mărimi inseparabile, spre deosebire de mecanica newtoniană unde timpul și spațiul sunt independente. Să analizăm cazul particular când evenimentele au loc în același punct $x'_2 = x'_1$, în momente diferite $t'_2 \neq t'_1$. În acest caz:

$$t_2 - t_1 = \gamma (t'_2 - t'_1).$$

Întrucât $\gamma < 1$, rezultă că $t_2 - t_1 > t'_2 - t'_1$.

Deci, durata unui fenomen într-un sistem în mișcare este mai mare decât durata aceluiași fenomen într-un sistem aflat în repaus. Acest rezultat este cunoscut sub numele de *dilatarea relativistă a timpului*.

• Contractia lungimilor

Fie în sistemul S' , pe axa $O'X'$, o bară de lungime $x'_2 - x'_1 = l'$ în repaus. Dorim să aflăm lungimea barei în mișcare în sistemul S . În acest scop, observatorul din sistemul S trebuie să fixeze simultan coordonatele x_1 și x_2 ale extremităților corpului în mișcare, obținând $l = x_2 - x_1$.

Din (2.1) avem:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt), \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt),$$

de unde rezultă că:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \Leftrightarrow l' = \gamma l.$$

Deoarece $v < c$, rezultă că $\gamma > 1$ și deci $l' > l$.

Așadar, lungimea corpului măsurată în mișcare este mai mică decât lungimea lui în repaus. Acest fenomen este denumit *contractia lungimii (distanței)*.

Invariante Lorentz

O cantitate fizică care rămâne neschimbată la transformările Lorentz se spune că este invariantă Lorentz. De exemplu considerăm un puls de lumină care pleacă din origine la timpul $t = t' = 0$, și se propagă ca o undă sferică. Un observator în repaus în sistemul S descrie poziția frontului de undă sferică la timpul t prin ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \Rightarrow c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Dar, din principiile relativității speciale, un observator în repaus din S' vede pulsul de lumină că se deplasează cu aceeași viteză c , scriind astfel o ecuație similară pentru poziția frontului de undă sferic în S' :

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0.$$

Cantitatea $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ are aceeași valoare pentru toți observatorii inerțiali și se numește *invariantă Lorentz*.

2.1.2. 4-Vectorii în transformarea Lorentz

Este extrem de util să scriem coordonatele spațio-temporale în 4-vectori sub forma

$$X = X^\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

O transformare generală Lorentz este o aplicație liniară de la X la X' de forma

$$(X')^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu,$$

unde Λ este o matrice de tip 4×4 care verifică ecuația

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Leftrightarrow \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu = \eta_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

iar $\eta_{\mu\nu}$ este metrica Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1).$$

Soluțiile pentru (2.3) se împart în două clase:

În prima clasă avem rotațiile. Fiind dată o matrice de rotație R de tip 3×3 care verifică $R^T R = 1$, putem construi o transformare Lorentz Λ care verifică (2.3) prin încorporarea lui R în partea spațială:

$$\Lambda^\mu_\nu = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array} \right). \quad (2.4)$$

Aceste transformări descriu modul de corelare a coordonatelor a doi observatori care se rotesc unul în raport cu celălalt.

Cealaltă clasă de soluții pentru (2.3) sunt transformările Lorentz. Acestea sunt transformările potrivite pentru observatori care se mișcă unul în raport cu celălalt. Transformările Lorentz speciale (BOOST) (2.1) sunt echivalente cu

$$\Lambda^\mu_\nu = \left(\begin{array}{cc|cc} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (2.5)$$

unde $\beta = \frac{v}{c}$. Deci relația (2.3) poate fi considerată ca o definiție pentru transformările Lorentz speciale.

Cu 4-vectorii se pot scrie foarte ușor cantități invariante. Pentru a le construi, luăm produsul scalar a doi 4-vectori. Acesta este dat de metrica Minkowski și vine cu unele semne minus. De exemplu, produsul scalar al unui 4-vector X cu el însuși este dat de:

$$X \cdot X = X^\mu \eta_{\mu\nu} X^\nu = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 ,$$

care este un invariant Lorentz. Similar, dacă avem doi 4-vectori X și Y atunci produsul scalar

$$X \cdot Y = X^\mu \eta_{\mu\nu} Y^\nu$$

este tot un invariant Lorentz.

2.1.3. Ridicarea și coborârea indicilor

Semnele minus din metrica Minkowski η indică faptul că este util să se introducă o ușoară modificare la convenția obișnuită de sumare a indicilor care se repetă.

Fie 4-vectorul

$$X^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = (x, y, z),$$

cu indicele spațio-temporal plasat ca indice superior. Definim

$$X_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix},$$

cu indicele spațio-temporal plasat inferior. Cu această convenție, produsul scalar Minkowski poate fi scris sub forma

$$X^\mu X_\mu = c^2 t^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}.$$

În schimb, $X^\mu X^\mu = c^2 t^2 + \mathbf{x}^2$ este greșit în contextul relativității speciale. De fapt, vom declara în scurt timp că este gresit să scriem lucruri precum $X^\mu X^\mu$.

Este firesc să ne gândim la X_μ în termenii lui X^μ folosind metrica Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. Următoarea ecuație este evidentă:

$$X_\mu = \eta_{\mu\nu} X^\nu .$$

Aceasta înseamnă că ne putem gândi la metrica Minkowski ca permițându-ne să coborâm indicii. Pentru a ridica indicii înapoi avem nevoie de inversa lui $\eta_{\mu\nu}$, care este aceeași matrice $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, ceea ce înseamnă că avem $\eta^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$ și putem scrie:

$$X^\nu = \eta^{\nu\mu} X_\mu.$$

De exemplu, pentru 4-vectorul viteză $U^\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$, pe care îl vom defini mai târziu (în secț. 2.15), avem

$$U_\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ -\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Această diferențiere între indici superiori și indici inferiori oferă un formalism simplu pentru a asigura că toate obiectele au proprietăți frumoase de transformare relativ la grupul Lorentz. Insistăm ca, la fel ca în convenția de sumare obișnuită în care indicii repetați să apară doar în perechi, acum insistăm în plus ca perechile să apară întotdeauna cu un indice în sus și cu celălalt în jos. Rezultatul va fi un obiect invariant la transformările lui Lorentz.

2.1.4. Vectori, covectori și tensori în relativitatea specială. Forma covariantă

Este nevoie de o matematică mai profundă pentru distingerea lui X^μ și X_μ . Formal, aceste obiecte fac parte din spații duale unul al altuia. Vom continua să ne referim la (X^μ) ca vectori, dar pentru a le distinge, vom numi (X_μ) covectori.

Pentru moment, diferența primară dintre un vector și un covector este modul în care se transformă în urma rotațiilor și transformărilor Lorentz. Știm că, la o transformare Lorentz, orice 4-vector se schimbă ca:

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu.$$

Din aceasta vedem că un covector ar trebui să se transforme ca:

$$X_\mu \rightarrow X'_\mu = \eta_{\mu\rho} X'^\rho = \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma X^\sigma = \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma \eta^{\sigma\nu} X_\nu.$$

Folosind regula pentru ridicarea și coborârea indicilor, aplicată acum la transformarea Lorentz Λ , putem scrie aceasta ca

$$X_\mu \rightarrow \Lambda^\nu_\mu X_\nu.$$

Matricea Λ^ν_μ poate fi scrisă în funcție de matricea inversa Λ^{-1} . Pentru a vedea acest lucru folosim definiția transformărilor Lorentz (2.3):

$$\begin{aligned} \Lambda^\rho_\mu \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu &= \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \Lambda^\rho_\mu \Lambda_{\rho\nu} = \eta_{\mu\nu} \\ &\Rightarrow \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\rho = \delta^\sigma_\mu \\ &\Rightarrow \Lambda^\sigma_\rho \Lambda^\rho_\mu = \delta^\sigma_\mu. \end{aligned}$$

Acum comparăm aceasta cu formula pentru inversa unei matrici,

$$(\Lambda^{-1})^\sigma_\rho \Lambda^\rho_\mu = \delta^\sigma_\mu \Rightarrow (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu = \Lambda^\sigma_\rho. \quad (2.7)$$

Rezultatul (2.7) este analog cu afirmația că inversa unei matrici de rotație este matricea transpusă. Pentru transformările generale Lorentz, inversa este un fel de transpunere unde "un fel" înseamnă că există semne minus de la ridicare și coborâre. Plasarea indicilor în (2.7) ne indică unde merg aceste semne de minus.

Concluzia care o tragem din (2.7) este că dacă vrem să renunțăm la notația cu indici, atunci vectorii se transformă ca $X \rightarrow \Lambda X$ în timp ce covectorii - care, în scopul acestei propoziții, îi vom numi $\hat{X}$ - se transformă ca $\hat{X} \rightarrow \Lambda^{-1} \hat{X}$.

De exemplu, pentru 4-derivata $\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$, despre care vom vorbi mai târziu, avem

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right).$$

Observăm că indicele superior al 4-vectorul X^μ a migrat la un indice inferior al derivatei ∂_μ . Pentru ca acest lucru să aibă sens notațional, vom verifica că ∂_μ se transformă într-adevăr ca un covector. La o transformare Lorentz, $X^\mu \rightarrow X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu$, deci avem

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu = \Lambda^\nu_\mu \partial_\nu,$$

care este într-adevăr transformarea unui covector.

Tensori în relativitatea specială

Cel mai general obiect poate avea o mulțime de indici superiori și inferiori, $T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m}$. Aceste obiecte sunt denumiți și *tensori* de tipul (n, m) . Pentru a fi considerați ca tensori, ei trebuie să se transforme la o transformare Lorentz ca:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_n}_{\rho_n} \Lambda^{\sigma_1}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\sigma_m}_{\nu_m} T^{\rho_1 \dots \rho_n}_{\sigma_1 \dots \sigma_m}. \quad (2.8)$$

Putem întotdeauna folosi metrica Minkowski pentru a ridica și a coborî indicii tensorilor, schimbând tipul de tensor, dar păstrând numărul total de indici $n + m$ fixat.

Tensorii de acest fel stau la baza teoriilor noastre. Acest lucru se datorează faptului că, dacă construim ecuații numai din tensori care se transformă în acest mod, atunci atât timp cât indicii $\mu, \nu, \dots$ coincid în ambii membri ai ecuației, avem garanția că ecuația arată la fel în toate SRI. Astfel de ecuații se consideră a fi *covariante*.

De acum înainte putem fi siguri că lucrăm cu o teorie compatibilă cu relativitatea prin asigurarea a două lucruri simple :

- Că avem de a face doar cu tensori.
- Că indicii coincid în ambii membri ai ecuației.

2.1.5. Forma covariantă

Deci...

O ecuație exprimată exclusiv în termeni de 4-vectori și invarianți Lorentz se spune că este în *formă covariantă*.

Dacă o ecuație poate fi pusă în formă covariantă, înseamnă că ecuația va continua să aibă aceeași formă dacă toate cantitățile implicate suferă o transformare Lorentz.

O ecuație care este în formă covariantă este compatibilă cu relativitatea specială.

2.1.6. Timpul propriu, distanța proprie. 4-Viteza, 4-impulsul, operatorul diferențial (4-gradientul) ∂^μ și operatorul lui D'alambert $\square$

Cheia construirii teoriilor relativiste ale Naturii constă în găsirea variabilelor cu reguli de transformare tensoriale în transformările lui Lorentz. 4-vectorii X , etichetând punctele spațio-temporale, sunt un început bun. Dar avem nevoie de mai mult. Aici analizăm modul în care celelalte variabile cinematice: viteza, impulsul și accelerația formează 4 –vectori.

Să presupunem că, într-un sistem de referință, particula descrie o traiectorie. Ideea este de a găsi o modalitate de a parametriza această traiectorie într-un mod în care toți observatorii să fie de acord. Alegerea naturală este **timpul propriu τ** , durata timpului experimentat de particula în sine. Dacă stăm într-un sistem de referință, urmărind mișcarea unei particule cu 3-viteza newtoniană $\mathbf{u}(t)$, atunci relația dintre timpul t și timpul propriu al particulei τ este dată de

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}.$$

De asemenea, **distanța proprie** este dată de relația

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

care se poate scrie ca

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right) = c^2 \frac{dt^2}{\gamma^2(\mathbf{u})} := c^2 d\tau^2,$$

deci $d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2}$, care reprezintă relația dintre $d\tau$ și ds pentru $c \neq 1$.

• 4 - Viteza

Pentru a defini viteza într-o formă invariantă, definim 4-viteza în funcție de timpul propriu prin:

$$U := \frac{dX}{d\tau} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

Patratul lungimii sale este dat de:

$$\|U\|^2 = U_\mu U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX_\mu}{d\tau} = \gamma^2(\mathbf{u}) c^2 - \gamma^2(\mathbf{u}) \mathbf{u}^2 = \gamma^2(\mathbf{u}) c^2 \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right) = c^2.$$

Deci,

$$\|U\|^2 = c^2. \quad (2.10)$$

De asemenea, din (2.9) avem:

$$\|U\|^2 = \gamma^2(\mathbf{u})(c^2 - \mathbf{u}^2). \quad (2.11)$$

Din (2.10) și (2.11) rezultă că

$$c^2 = \gamma^2(\mathbf{u})(c^2 - \mathbf{u}^2),$$

care se reduce la definiția factorului Lorentz.

- **4 - Impulsul**

Similar, putem defini 4-impulsul prin

$$P := mU = m\gamma(\mathbf{u})\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

unde $E = m\gamma c^2$ este energia totală a particulei în mișcare și $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u} = (p_x, p_y, p_z)$ este 3-impulsul în relativitatea specială, iar m este masa de repaus (masa unei particule într-un sistem în raport cu care este în repaus).

Patratul lungimii sale este dat de:

$$\|P\|^2 = P_\mu P^\mu = m^2 U_\mu U^\mu = m^2 c^2. \quad (2.13)$$

Din (2.12) avem:

$$\|P\|^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}. \quad (2.14)$$

Din (2.13) și (2.14) rezultă relația dintre energie și moment:

$$E^2 = c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + (mc^2)^2.$$

- **Operatorul diferențial ∂^μ și operatorul lui D'alambert $\square$**

Operatorul diferențial ∂^μ este un 4-vector care are componentele:

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (2.15)$$

Asociat cu operatorul ∂^μ este operatorul diferențial (co-vectorul) ∂_μ :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Lambda_\mu^\nu \partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (2.16)$$

Deoarece acesta este un operator, el nu are o „lungime”. Dar putem defini operatorul $\square$ ca:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu, \quad (2.17)$$

numit operatorul lui D'alambert.

Relația (2.17) este echivalentă cu:

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

2.2. Curenți conservați

2.2.1. Sarcini electrice văzute de observatori diferiți

Ecuția de continuitate

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 ,$$

unde $\rho(\mathbf{x}, t)$ este desitatea de sarcină, iar $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ este densitatea curentului, ne spune că sarcina este local conservată.

Ecuția de continuitate este deja pe deplin compatibilă cu relativitatea. Pentru a vedea acest lucru, trebuie mai întâi să apreciem că densitatea de sarcină și de curent se pot combina într-un 4-vector,

$$J^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{J} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Desigur, plasarea obiectelor într-un 4-vector are consecințe: ne spune cum arată aceste obiecte pentru observatori diferiți. Să ne convingem repede că are sens ca densitatea de sarcină și de curent se transformă într-adevăr în acest mod. Putem începe prin a considera o situație în care există numai sarcini statice cu densitate ρ_0 și fără curent. Deci $J^\mu = (\rho_0, 0)$. Acum, într-un sistem care se mișcă cu viteza $\mathbf{v}$, densitatea curentului va apărea ca $J'^\mu = \Lambda^\mu_\nu J^\nu$, cu transformarea Lorentz dată de (2.5). Noua densitate de sarcină și de curent sunt atunci:

$$\rho' = \gamma \rho_0 , \quad \mathbf{J}' = -\gamma \rho_0 \mathbf{v}.$$

Prima dintre aceste ecuații ne spune că observatori diferiți văd densități de sarcină diferite. Acest lucru se datorează contracției Lorentz, putând fi explicat astfel: densitatea sarcinii înseamnă sarcina pe unitatea de volum, iar volumul se contractă deoarece lungimi paralele cu mișcarea sunt supuse contracției Lorentz. Acesta este motivul apariției factorului γ în densitatea sarcinii observate în sistemul în mișcare. A doua dintre aceste ecuații reprezintă doar extensia relativistă a formulei $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{v}$. (Semnul minus se datorează faptului că $\mathbf{v}$ denotă, aici, viteza observatorului în mișcare; prin urmare sarcina se mișcă cu o viteză relativă $-\mathbf{v}$).

În noua noastră notație relativistă, ecuația de continuitate ia forma deosebit de simplă:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.19)$$

Această ecuație este invariantă Lorentz. Aceasta se întâmplă pur și simplu pentru că indicii sunt contractați în mod corect: unul în sus și unul în jos.

Sarcina electrică nu depinde de timp sau poziție. Prin urmare sarcina netă a unui obiect este invariantă Lorentz. Totuși, din ecuațiile lui Maxwell, un câmp electric este generat de o densitate de sarcină ρ :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho.$$

Așa cum am spus mai sus, densitatea de sarcină este sarcina pe unitatea de volum, iar volumul unui obiect nefiind invariant Lorentz (datorită contracției Lorentz), rezultă că densitatea de sarcină nu este invariantă Lorentz. Acest fapt sugerează că câmpurile electrice (și magnetice) nu sunt invariinți Lorentz. Observatori în sisteme de referință inerțiale (SRI) diferite vor fi de acord cu privire la modul în care un sistem electromagnetic se comportă, dar vor da explicații diferite pentru comportamentul său.

2.2.2. Forțe electromagnetice văzute de observatori diferiți

Considerăm un conductor lung staționar (în repaus) în sistemul S , cu sarcina netă nulă (egală cu zero), dar străbatut de un curent I .

O sarcină q care se deplasează cu viteza v în același direcție cu curentul din conductor simte o forță magnetică care o atrage către conductor.

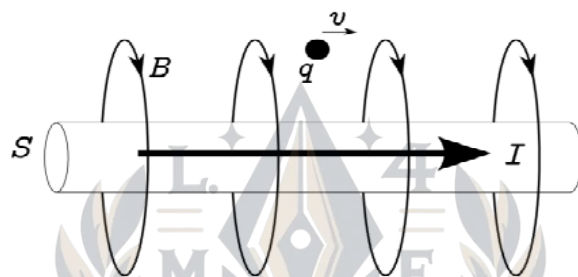


Fig. 2.2 Un conductor lung staționar în sistemul S , cu sarcina netă nulă, străbatut de un curent I ; și sarcina q care se deplasează cu viteza v în același direcție cu curentul I din conductor

Un observator din S vede un conductor neutru d.p.d.v. electric, cu același număr de sarcini pozitive și negative pe unitatea de lungime.

Presupunem că curentul ia naștere din sarcinile pozitive care se mișcă cu viteza v în aceeași direcție ca sarcina q .

Deoarece conductorul este neutru d.p.d.v. electric, densitățile liniare de sarcină a sarcinilor negative staționare și a sarcinilor pozitive în mișcare sunt aceleași.

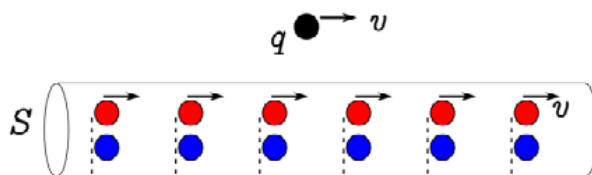


Fig. 2.3. Conductorul văzut de un observator din sistemul S

La o distanță radială r de conductor, observatorul din S vede un câmp magnetic:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

Sarcina q care se mișcă cu viteza v paralelă cu conductorul la o distanță r de conductor simte o forță:

$$F = qvB = -qv \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

unde semnul minus indică o forță îndreptată către conductor pentru q, v și I pozitive.

Folosind legea a doua a lui Newton a mișcării, accelerația sarcinii care rezultă din forța magnetică este:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{F}{\gamma m} = -\frac{q}{\gamma m} v \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

unde m este masa sarcinii în sistemul său staționar.

Acum considerăm un observator în S' , sistemul staționar al sarcinii q (în care sarcina este în repaus). Acest observator ar trebui, de asemenea, să vadă sarcina accelerând către conductor.

Folosind dilatarea timpului, $dt = \gamma dt'$, rata accelerației în S' ar trebui să fie:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \gamma^2 \frac{d^2 r}{dt'^2} = -\gamma \frac{q}{m} v \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (2.20)$$

Dar în S' , sarcina este în repaus. Aceasta înseamnă că nu va simți nici o forță din câmpul magnetic din jurul conductorului. Atunci de ce sarcina accelerează în S' ?

Considerăm conductorul așa cum este văzut de către observatorul din S' .

Presupunem că sunt N particule încărcate electric pe unitatea de lungime a conductorului când este văzut din S .

Numarul de sarcini electrice negative pe unitatea de lungime când sunt văzute din S' este γN (deoarece sarcinile negative erau în repaus în sistemul S , și se deplasează cu viteza v în sistemul S').

Numarul de sarcini electrice pozitive pe unitatea de lungime când sunt văzute din S' este N/γ (deoarece sarcinile pozitive se mișcă cu viteza v în S , și sunt staționare când sunt văzute din S').

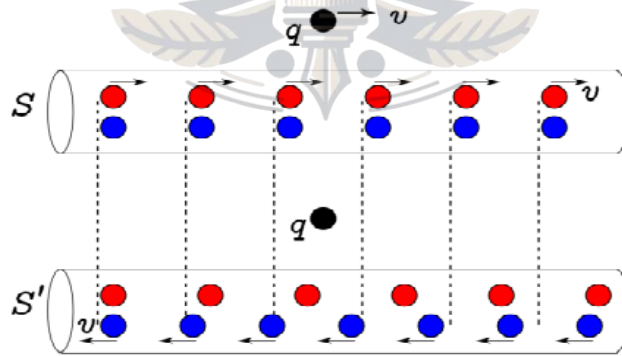


Fig. 24. Conductorul văzut de un observator din sistemul S și un observator din sistemul S'

Densitățile sarcinilor pozitive și negative nu se anulează în S' . Densitatea liniară a sarcinii nete λ' :

$$\lambda' = Ne \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma \right) = -\gamma Ne \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) = -\gamma Ne \frac{v^2}{c^2}.$$

Deoarece curentul I vine de la sarcinile pozitive e cu densitatea de sarcină Ne pe unitate de lungime care se deplasează cu viteza v , putem scrie:

$$I = Nev.$$

Prin urmare densitatea liniară de sarcină este:

$$\lambda' = -\gamma \frac{v}{c^2} I.$$

Distanțele perpendiculare la direcția de mișcare nu sunt afectate de contracția relativistă, deci sarcina q este la aceeași distanță r de conductor în sistemul S' ca în sistemul S .

Câmpul electric în poziția unde se află sarcina este:

$$E' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} = -\gamma \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{v}{c^2} I.$$

Folosind $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$, aceasta se poate scrie:

$$E' = -\gamma v \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Forța electrostatică ce acționează asupra conductorului în S' este:

$$F' = qE' = -\gamma qv \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Prin urmare, accelerația sarcinii în S' este:

$$\frac{d^2 r}{dt'^2} = \frac{F'}{m} = -\gamma \frac{q}{m} v \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (2.21)$$

Aceasta este în concordanță cu ecuația (2.20) – chiar dacă am obținut rezultatul într-un mod complet diferit.

Forța ce acționează asupra particulei, care era pur magnetică în S , pare să fie pur electrostatică în S' .

Observatorii din cele două sisteme sunt de acord asupra accelerației, dar nu sunt de acord în legătură cu originea forței care produce accelerația.

Câmpurile electrice și magnetice sunt „interschimbabile” : dacă observatorii văd un câmp electric sau magnetic într-o anumită situație, depinde de sistemul de referință al fiecăruia.

2.3. Potențiale gauge și tensorul electromagnetic

La transformările Lorentz, câmpurile electrice și magnetice se vor transforma unul în altul. În această secțiune, dorim să înțelegem mai precis cum se întâmplă acest lucru. Până acum, obiectele care au proprietăți frumoase de transformare sub transformările Lorentz sunt 4-vectorii. Dar aici avem doi 3-vectori, $\mathbf{E}$ și $\mathbf{B}$. Cum facem ca aceștia să se transforme unul în celălalt?

2.3.1. Invarianta gauge și relativitatea

Pentru a obține o idee despre cum se întâmplă acest lucru, mai întâi ne referim la potențialele scalare și vectoriale, ϕ și $\mathbf{A}$. Acestea sunt folosite pentru a rezolva unele dintre ecuațiile electrostaticii și magnetostaticii:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Cu toate acestea, în general, aceste expresii nu pot fi corecte. Știm că atunci când $\mathbf{B}$ și $\mathbf{E}$ se schimbă cu timpul, cele două ecuații Maxwell sunt:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \text{ și } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Cu toate acestea, este încă posibil să se utilizeze potențialele scalare și vectoriale pentru a rezolva ambele ecuații. Soluțiile sunt:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \text{ și } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

unde, acum, $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ și $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$.

Așa cum am văzut mai înainte, nu există o alegere unică a lui ϕ și $\mathbf{A}$. Putem să facem transformarea $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi$ și $\mathbf{B}$ rămâne neschimbat. Acum acest lucru necesită o transformare compensatorie a lui ϕ :

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \text{ și } \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad (2.22)$$

cu $\chi = \chi(\mathbf{x}, t)$. Acestea sunt transformări gauge. Ele reproduc transformarea noastră anterioară gauge pentru $\mathbf{A}$, în timp ce cuprind și schimbări constante în ϕ .

Cum ajută acest lucru la încercarea noastră de a reformula electromagnetismul într-un mod compatibil cu relativitatea specială? Acum avem un scalar și un 3-vector. Definim 4 - potențialul electromagnetic ca

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, -\mathbf{A} \right)$$

sau, în mod echivalent, $A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, -\mathbf{A} \right)$. În acest limbaj, transformările gauge (2.22) iau o formă deosebit de plăcută:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \chi, \quad (2.23)$$

unde χ este orice funcție a spațiului și timpului.

2.3.2. Tensorul câmpului electromagnetic

Acum avem toate noțiunile necesare pentru a determina modul în care se transformă câmpurile electrice și magnetice. Din 4-derivata $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \nabla\right)$ și 4-vectorul $A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, -\mathbf{A}\right)$, putem forma tensorul anti-simetric:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Acesta este construit pentru a fi invariant la transformările gauge (2.23). Avem:

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \chi - \partial_\nu \partial_\mu \chi = F_{\mu\nu}.$$

Acest lucru sugerează deja că componentele implică câmpurile $\mathbf{E}$ și $\mathbf{B}$. Pentru a verifica dacă este adevărat acest lucru, putem face câteva calcule mici,

și

$$F_{01} = \frac{1}{c} \frac{\partial(-A_x)}{\partial t} - \frac{\partial\left(\frac{\phi}{c}\right)}{\partial x} = \frac{E_x}{c}$$

$$F_{12} = \frac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial y} = -B_z.$$

Calcule similare pentru toate celelalte intrări ne dau o matrice de câmpuri electrice și magnetice:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Acesta, atunci, este răspunsul la întrebarea noastră inițială. Putem face un obiect covariant Lorentz compus din doi 3-vectori prin aranjarea lor într-un tensor anti-simetric. $F_{\mu\nu}$ se numește tensorul câmpului electromagnetic. În mod echivalent, putem ridica ambii indici folosind metrica Minkowski pentru a obține:

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Ambii $F_{\mu\nu}$ și $F^{\mu\nu}$ sunt tensori. Aceasta înseamnă că $F_{\mu\nu}$ trebuie să se transforme ca:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}. \quad (2.25)$$

Alternativ, dacă dorim să scăpăm de indici, avem $F' = \Lambda F \Lambda^T$. Observatorul într-un sistem de referință nou, vede câmpurile electrice și magnetice $\mathbf{E}'$ și $\mathbf{B}'$, care diferă de observatorul inițial. Cele două sunt legate de (2.25). Să vedem ce înseamnă acest lucru în câteva exemple ilustrative.

• Rotații

Pentru a calcula transformarea (2.25), este probabil mai simplu să facem doar sumele, care sunt implicate în indicii repetați ρ și σ . Alternativ, dacă dorim să revenim la înmulțirea matricei, atunci este aceeași lucru ca și $F' = \Lambda F \Lambda^T$. Oricum, obținem același rezultat. Pentru o rotație, matricea R de tip 3×3 este încorporată în blocul din dreapta jos al Λ , așa cum se arată în (2.4). Un calcul rapid arată că transformarea câmpurilor electrice și magnetice în (2.25) este așa cum era de așteptat:

$$\mathbf{E}' = R\mathbf{E} \quad \text{și} \quad \mathbf{B}' = R\mathbf{B}.$$

• Transformări

Lucrurile sunt mai interesante pentru transformări. Trebuie să facem câteva calcule scurte. De exemplu, avem:

$$-\frac{E'_x}{c} = F'^{01} = \Lambda^0_\rho \Lambda^1_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_0 F^{10} = \frac{\gamma^2 v^2}{c^2} \frac{E_x}{c} - \gamma^2 \frac{E_x}{c} = -\frac{E_x}{c}$$

și

$$-B'_z = F'^{12} = \Lambda^1_\rho \Lambda^2_\sigma F^{\rho\sigma} = \Lambda^1_0 \Lambda^2_2 F^{02} + \Lambda^1_1 \Lambda^2_2 F^{12} = \frac{\gamma v}{c^2} E_y - \gamma B_z = -\gamma(B_z - v E_y / c^2).$$

Rezultatul final al transformării câmpului electric la o transformare după direcția X este

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - v B_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + v B_y) \quad (2.26)$$

și pentru câmpul magnetic,

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right), \quad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right). \quad (2.27)$$

Să presupunem că $E = 0$ și $B \neq 0$. Așadar, în reperul (x, y, z, t) nu există câmp electric, dar există câmp magnetic. Cf. relațiilor (2.26), în celalalt reper, avem $E'_y = -\gamma v B_z$ și $E'_z = \gamma v B_y$. Deci, avem atât câmp electric, cât și câmp magnetic.

Invers, dacă $B = 0$ și $E \neq 0$, atunci cf. (2.27), $B'_y = \gamma \frac{v}{c^2} E_z$ și $B'_z = -\gamma \frac{v}{c^2} E_y$. Deci, avem din nou un câmp electric și unul magnetic.

Așadar, existența și modul de manifestare al câmpurilor electrice și magnetice depind de mișcarea observatorului. Mai exact, ceea ce pare a fi un câmp magnetic pentru un observator, pare un câmp electric pentru altul și invers.

Observăm că în limita $v \ll c$, avem $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ și $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$. Aceasta poate fi considerată ca transformarea galileeană a câmpurilor electrice și magnetice. Recunoaștem $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, ca fiind combinația care apare în legea forței Lorentz. Vom reveni la această forță în secțiunea 2.5, unde vom vedea cum este compatibilă cu relativitatea specială.

2.3.3. Exemplul 1

Luăm în considerare o sarcină punctiformă Q , staționară într-un sistem inerțial S . Știm că câmpul său electric este dat de

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 [x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

în timp ce câmpul său magnetic dispare. Acum, să aruncăm o privire asupra aceleiași particule din sistemul de referință S' , care se mișcă cu viteza $v = (v, 0, 0)$ în raport cu S . Transformarea Lorentz care leagă cele două este dată de (2.5); astfel noul câmp electric este dat de către (2.26):

$$\mathbf{E}' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 [x'^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x' \\ \gamma y' \\ \gamma z' \end{pmatrix}.$$

Dar acesta este încă exprimat în termenii coordonatelor inițiale. Ar trebui să-l rescriem acum în termenii coordonatelor lui S' , care sunt: $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$ și $z' = z$. Inversând acestea (sau folosind (2.2)), avem:

$$\mathbf{E}' = \frac{Q\gamma}{4\pi\epsilon_0 [\gamma^2(x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x' + vt' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

În sistemul de referință S' , particula se află la $x' = (-vt', 0, 0)$, deci vedem că câmpul electric radiază din poziția sarcinii așa cum ar trebui. Deocamdată, să considerăm câmpul electric când $t' = 0$, deci particula se află în originea noului sistem. Câmpul electric are o orientare radială, cu sensul spre exterior, de-a lungul direcției

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Cu toate acestea, câmpul electric nu este izotrop. Acest lucru rezultă din numitorul lui (5.28), care nu este proporțional cu r'^3 , deoarece există un factor suplimentar al lui γ^2 în fața componentei x' . În schimb, la $t' = 0$, numitorul implică combinația

$$\begin{aligned} \gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2 &= (\gamma^2 - 1)x'^2 + \mathbf{r}'^2 = \frac{v^2\gamma^2}{c^2} x'^2 + \mathbf{r}'^2 = \left(\frac{v^2\gamma^2}{c^2} \cos^2 \theta + 1\right) \mathbf{r}'^2 \\ &= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right) \mathbf{r}'^2, \end{aligned}$$

unde θ este unghiul dintre $\mathbf{r}'$ și axa X' ; în ultima linie, am folosit doar un simplu calcul trigonometric și definiția lui $\gamma^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$. Aceasta înseamnă că putem scrie câmpul electric în sistemul de referință S' ca:

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\gamma^2(1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2)^{3/2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \hat{\mathbf{r}}'.$$

Pre-factorul este responsabil pentru faptul că, câmpul electric nu este izotrop. Vedem că reduce câmpul electric de-a lungul axei x' (când $\theta = 0$) și crește câmpul de-a lungul axelor perpendiculare Y' și Z' (atunci când $\theta = \pi/2$). Acest lucru poate fi considerat o consecință a contracției Lorentz, comprimând liniile de câmp electric în direcția de deplasare.

Particulele în mișcare dau, de asemenea, naștere unui câmp magnetic. Acest lucru este ușor de calculat folosind transformările Lorentz (2.27). Acesta este:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q \gamma v}{4\pi[\gamma^2(x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ z' \\ -y' \end{pmatrix}.$$

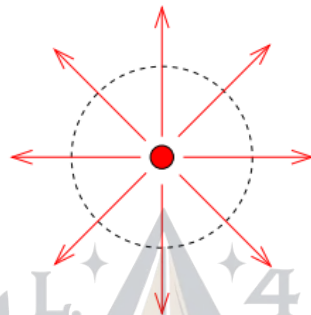


Fig. 2.5 Liniile câmpului izotrop ale unei sarcini statice

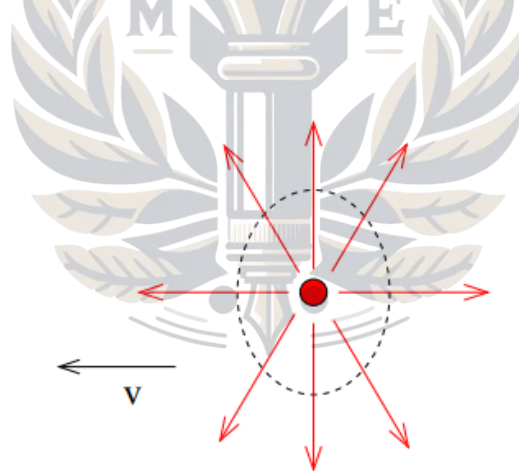


Fig. 2.6. Liniile de câmp comprimate ale unei sarcini în mișcare

2.3.4. Exemplul 2

Un observator staționar măsoară câmpul magnetic al Pământului ca fiind egal cu $30 \mu\text{T}$. Ce valoare ar trebui să obțină un observator într-un avion ce zboară pe lângă observatorul staționar cu viteza de 900 km/h perpendicular pe direcția câmpului Pământului?

Considerăm axa X ca fiind în direcția mișcării avionului, relativă în raport cu observatorul staționar, și axa Z în direcția câmpului magnetic. Pentru observatorul staționar, câmpul magnetic este:

$$B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = 30 \mu\text{T};$$

și câmpul electric este:

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0.$$

Pentru observatorul în mișcare, $\beta = 8.3 \cdot 10^{-7}$ și $\beta \approx 1$. Câmpul magnetic măsurat de către observatorul în mișcare este:

$$B'_x = 0, \quad B'_y = 0, \quad B'_z = \gamma B_z \approx 30 \mu\text{T};$$

și câmpul electric este:

$$E'_x = 0, \quad E'_y = -\gamma v B_z \approx -7.5 \text{ mV/m}, \quad E'_z = 0.$$

2.3.5. Scalarii Lorentz

Acum putem pune o întrebare: există o combinație a câmpurilor electrice și magnetice cu care toți observatorii sunt de acord? Folosind notația indicilor, este ușor de răspuns. Trebuie doar să notăm un obiect care nu are indici variabili μ sau ν . Nu putem folosi alegerea evidentă a lui $\eta_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, deoarece aceasta dispăre din cauza antisimetriei lui $F^{\mu\nu}$. Cel mai simplu lucru pe care îl putem scrie este:

$$\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{\mathbf{E}^2}{c^2} + \mathbf{B}^2.$$

Observăm semnul minus relativ între $\mathbf{E}$ și $\mathbf{B}$, reflectând un semn minus similar în intervalul spațio-temporal. Totuși, acesta nu este singurul scalar Lorentz pe care îl putem construi din $\mathbf{E}$ și $\mathbf{B}$. Există un altul, ceva mai subtil. Pentru a construi acest lucru, trebuie să apreciem că spațiul-temporal Minkowski este echipat cu un alt obiect tensor natural, dincolo de metrica familiară $\eta_{\mu\nu}$. Acesta este obiectul complet anti-simetric, cunoscut sub numele de tensor alternativ,

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{dacă } \mu\nu\rho\sigma \text{ este o permutare pară a lui } 0123 \\ -1 & \text{dacă } \mu\nu\rho\sigma \text{ este o permutare impară a lui } 0123 \end{cases},$$

iar $e^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ dacă sunt indici care se repetă.

Pentru a vedea de ce acesta este un obiect natural în spațiul Minkowski, să ne uităm la modul în care se schimbă la transformările Lorentz. Transformarea obișnuită a tensorului este:

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\kappa \Lambda^\nu_\lambda \Lambda^\rho_\alpha \Lambda^\sigma_\beta \epsilon^{\kappa\lambda\alpha\beta}.$$

Este simplu să verificăm dacă $\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma}$ este complet anti-simetric; moștenește această proprietate de la $\epsilon^{\kappa\lambda\alpha\beta}$ în partea dreaptă. Dar aceasta înseamnă că $\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma}$ trebuie să fie proporțional cu $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Trebuie doar să determinăm constanta proporționalității. Pentru a face acest lucru, ne putem uita la:

$$\epsilon'^{0123} = \Lambda^0_\kappa \Lambda^1_\lambda \Lambda^2_\alpha \Lambda^3_\beta \epsilon^{\kappa\lambda\alpha\beta} = \det(\Lambda).$$

Acum, toate transformările Lorentz au $\det(\Lambda) = \pm 1$. Cei cu $\det(\Lambda) = 1$ compun "grupul propriu Lorentz" $SO(1,3)$. Aflăm că tensorul alternativ $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ este invariant la transformările Lorentz corespunzătoare. Ceea ce ne spune cu adevărat este că spațiul Minkowski vine cu o bază ortonormală orientată. Prin coborârea indicilor cu ajutorul metricii Minkowski, putem construi și tensorul $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, care are $\epsilon_{0123} = -1$.

Tensorul alternativ ne permite să construim un al doilea tensor de câmp, uneori numit tensorul dublu electromagnetic:

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

$\hat{F}^{\mu\nu}$ este, uneori, scris, de asemenea, ca $*F^{\mu\nu}$. Vedem că acesta arată exact ca $F^{\mu\nu}$ dar cu câmpurile electrice și magnetice schimbate între ele. De fapt, uitându-ne atent vom observa că există diferență și de un semn minus: $\hat{F}^{\mu\nu}$ se obține din $F^{\mu\nu}$ prin substituția $\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B}$ și $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}/c$.

Prin faptul că tensorul $\hat{F}^{\mu\nu}$ se transformă ca

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \hat{F}^{\rho\sigma},$$

putem folosi acest lucru pentru a construi noi cantități invariante Lorentz. Luând pătratul evident al $\hat{F}$ nu ne dă nimic nou, deoarece

$$\hat{F}^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Dar prin contracția lui $\hat{F}$ cu F , găsim un nou invariant Lorentz:

$$\frac{1}{4} \hat{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

Acest lucru ne spune că produsul scalar al lui $\mathbf{E}$ și $\mathbf{B}$ este văzut la fel în toate sistemele de referință.

2.4. Ecuațiile lui Maxwell

Acum avem mecanismele de a scrie ecuațiile lui Maxwell într-un mod care este, în mod evident, compatibil cu relativitatea specială. Ele iau o formă *covariantă* foarte simplă:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad \text{și} \quad \partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.30)$$

Ecuațiile Maxwell nu sunt invariante la transformările Lorentz. Acest lucru se datorează faptului că există indicii ν pe ambele părți. Vom vedea în scurt timp că legea lui Gauss se transformă în legea lui Ampère într-o transformare Lorentz. Spunem că ecuațiile sunt *covariante* la transformările Lorentz, fiind astfel compatibile cu relativitatea specială.

Acest lucru înseamnă că un observator dintr-un sistem referențial diferit va confunda totul: spațiul și timpul, sarcinile și curenții, câmpurile electrice și magnetice. Deși observatorii nu sunt de acord cu privire la aceste lucruri, toți sunt de acord cu privire la modul în care se potrivesc împreună. Toți observatorii sunt de acord că, în sistemul lor referențial, câmpurile electrice și magnetice sunt guvernate de aceleași ecuații Maxwell.

Folosind $F^{\mu\nu}$, $\hat{F}^{\mu\nu}$, J^μ și ∂_μ , ecuațiile Maxwell nu sunt singurul lucru pe care l-am putea scrie compatibil cu invarianța Lorentz. Dar ele sunt cele mai simple. Orice altă ecuație ar fi neliniară în F sau $\hat{F}$ sau ar conține mai mulți termeni derivați sau ceva de genul acesta.

Interpretarea ecuațiilor lui Maxwell

Să verificăm acum că ecuațiile Maxwell (2.30) în formă relativistă coincid într-adevăr cu ecuațiile vectoriale. Trebuie doar să extindem părți diferite ale ecuației. Componentele primei ecuații Maxwell dau:

$$\begin{aligned} \partial_i F^{i0} &= \mu_0 J^0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \partial_\mu F^{\mu i} &= \mu_0 J^i \Rightarrow -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \end{aligned}$$

iar componentele celei de-a doua ecuații Maxwell dau:

$$\begin{aligned} \partial_i \hat{F}^{i0} &= 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \partial_\mu \hat{F}^{\mu i} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \end{aligned}$$

Acestea, desigur, sunt ecuațiile cunoscute ale lui Maxwell.

Iată câteva comentarii simple despre avantajele scrierii ecuațiilor Maxwell în formă relativistă. În primul rând, ecuațiile Maxwell implică faptul că curentul este conservat. Aceasta se datorează faptului că $F^{\mu\nu}$ este antisimetric; deci $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$, deoarece $\partial_\mu \partial_\nu$ este simetric. Prima ecuație Maxwell (5.30) necesită respectarea ecuației de continuitate:

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

A doua ecuație Maxwell poate fi scrisă în mai multe moduri diferite. Este echivalentă cu:

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \Leftrightarrow \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 ,$$

unde ultima dintre aceste egalități are loc, deoarece ecuația este construită astfel încât să fie pe deplin antisimetrică în ceea ce privește schimbul oricăror indici ρ, μ și ν .

Potențialul gauge A_μ a fost inițial introdus pentru a rezolva cele două ecuații Maxwell care sunt cuprinse în $\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = 0$. Acest lucru este puțin mai ușor de văzut în notația relativistă. Dacă scriem $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, atunci

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = 0 ,$$

unde egalitatea finală se datorează simetriei celor două derivate, combinate cu antisimetria tensorului ϵ . Aceasta înseamnă că am putea scrie la fel de bine ecuațiile Maxwell ca:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad \text{unde} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

În formulări mai avansate ale electromagnetismului (de exemplu, în formularea Lagrangiană), aceasta este forma în care apar ecuațiile Maxwell.

2.5. Forța Lorentz

Există un ultim aspect al electromagnetismului pe care trebuie să arătăm că este compatibil cu relativitatea: forța Lorentz. În universul newtonian, ecuația de mișcare pentru o particulă care se mișcă cu viteza $\mathbf{u}$ și cu impulsul $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ este:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.31)$$

Vrem să scriem această ecuație în formă 4-vectorială într-un mod în care se poate vedea clar cum toate obiectele se schimbă la transformările Lorentz.

Până acum ar trebui să fie intuitiv clar cum va funcționa aceasta. O particulă în mișcare simte forța magnetică. Dar, dacă transformăm către sistemul său în care este în repaus, nu există forță magnetică. În schimb, câmpul magnetic se transformă într-un câmp electric și găsim aceeași forță, acum interpretată ca o forță electrică.

Versiunea relativistă a lui (2.31) implică 4-impulsul P^μ , definit în (2.12), timpul propriu τ , prezentat în secțiunea 2.1.5, și tensorul electromagnetic $F^{\mu\nu}$. Forța electromagnetică care acționează asupra unei particule punctiforme de sarcină q poate fi scrisă ca

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}U_\nu , \quad (2.32)$$

unde 4-viteza este

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

iar 4-impulsul este $P = mU$.

Interpretarea forței Lorentz

Să verificăm dacă ecuația relativistă (2.32) ne dă fizica corectă. Desigur, este vorba de patru ecuații: una pentru fiecare $\mu = 0,1,2,3$. Se constată că componentele $\mu = 1,2,3$ ale lui (2.32) se aranjează într-o ecuație vectorială cunoscută

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = q\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \Rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (2.34)$$

unde am folosit relația $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$. Constatăm că recuperăm forța Lorentz. De fapt, există o ușoară diferență față de forța newtoniană (2.31), diferența fiind pierdută în notație. În notația newtoniană, impulsul este $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$. Totuși, în setarea relativistă de mai sus, impulsul este $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{u}$. Bineînțeles că versiunea relativistă este corectă, deși diferența apare doar la viteze mari.

Formularea relativistă a forței Lorentz (2.32) conține, de asemenea, o ecuație suplimentară care vine de la $\mu = 0$. Aceasta este:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{q}{c} \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}. \quad (2.35)$$

Reamintim că componenta temporală a 4-impulsului este energia $p^0 = E/c$. Aici energia este $E = m\gamma c^2$, care include atât masa de repaus a particulei, cât și energia sa cinetică. Ecuația suplimentară din (2.35) ne spune pur și simplu că energia cinetică crește atunci când asupra particulei acționează un câmp electric

$$\frac{d(\text{Energie})}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u},$$

unde am scris energia ca pe un cuvânt, în loc de E , pentru a evita confundarea cu câmpul electric $\mathbf{E}$.

2.5.1. Mișcarea în câmpuri constante

Știm deja cum câmpurile electrice și magnetice acționează asupra particulelor într-un univers newtonian. Câmpurile electrice accelerează particulele în linii drepte, iar câmpurile magnetice fac ca particulele să migreze în traiectorii circulare. Aici vom relua această analiză în cadrul relativist. Forța Lorentz rămâne aceeași, singura diferență este că impulsul este acum $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{u}$. Vom vedea cum acest fapt schimbă lucrurile.

Câmpul electric constant

Considerăm un câmp magnetic variabil și un câmp electric constant $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$. (Aici E denumește câmpul electric, nu energia!). Ecuația de mișcare (2.34) pentru o particulă încărcată cu viteza $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$ este

$$m \frac{d(\gamma u)}{dt} = qE \Rightarrow m\gamma u = qEt,$$

unde am presupus implicit că particula începe din repaus de la $t = 0$. Rearanjând, avem

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{qEt}{\sqrt{m^2 + q^2 E^2 t^2 / c^2}}.$$

Viteza nu depășește niciodată viteza luminii. În schimb, $u \rightarrow c$ când $t \rightarrow \infty$ cum ne-am fi așteptat. Este ușor să o integram încă o dată. Dacă particula pornește de la origine, avem

$$x = \frac{mc^2}{qE} \left(\sqrt{1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right)$$

Pentru momente timpurii, când vitezele nu sunt prea mari, aceasta se reduce la

$$mx \approx \frac{1}{2} qEt^2 + \dots,$$

care este rezultatul uzual non-relativist pentru particule supuse unei accelerații constante pe o linie dreaptă.

Câmpul magnetic constant

Acum, studiem cazul câmpului magnetic constant $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. În universul non-relativist, știm că particulele se mișcă într-o direcție circulară cu frecvență $\omega = qB/m$. Să vedem cum relativitatea schimbă lucrurile.

Începem prin a ne uita la componenta zero a ecuației de forță (2.35) care, în absența câmpului electric, este

$$\frac{dp^0}{d\tau} = 0.$$

Acest lucru ne spune că câmpurile magnetice nu funcționează. Știm acest lucru din fizica Newtoniană, dar rămâne adevărat în contextul relativist. Deci știm că energia, $E = \gamma mc^2$, este constantă. Dar acest lucru ne spune că viteza (norma vitezei) rămâne constantă. Cu alte cuvinte, viteza și, prin urmare, poziția, este pe direcție circulară. Ecuația mișcării este

$$m \frac{d(\gamma \mathbf{u})}{dt} = q \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Cum γ este constant, ecuația are aceeași formă ca în cazul non-relativist și soluțiile sunt cercuri (sau spirale dacă particula se mișcă și în direcția Z). Singura diferență este că frecvența cu care particula se mișcă într-un cerc depinde acum de cât de repede se mișcă particula,

$$\omega = \frac{qB}{m\gamma}$$

Putem interpreta acest lucru ca o consecință a creșterii relativiste a masei unei particule în mișcare.

Până acum am analizat situațiile în care $E = 0$ și în care $B = 0$. Dar am văzut că $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ și $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ sunt ambele cantități invariabile Lorentz. Aceasta înseamnă că soluțiile descrise mai sus pot fi transformate pentru a fi aplicate în orice situație în care

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ și $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ este fie > 0 sau < 0 . În situația generală, atât câmpurile electrice cât și cele magnetice sunt prezente, deci $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \neq 0$, având astfel trei posibilități de luat în considerare:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 > 0 \\ \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 < 0 \\ \mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = 0 \end{cases}$$



Capitolul 3

Relativitatea generală și ecuațiile lui Maxwell

Teoria relativității a lui Einstein se bazează pe principiul echivalenței, pe teoria invarianțială a lui Hilbert și calculul variațiilor. Cele două paradigme nu sunt echivalente. Folosind universalitatea ecuațiilor lui Maxwell, metoda variațională a lui Hilbert este utilizată pentru a determina tensorul energie-impuls și pentru a arăta că relativitatea generală poate fi formulată pe baza câmpurilor Maxwelliene, în loc de câmpuri de forță fizice specifice. Se dovedește o teorie unificată a câmpului în care câmpurile de forță Maxwelliane sunt pe poziții de compatibilitate, distincte de câmpul geometric.

Începem cu secțiunea 3.1 în care facem o introducere relativității generale, după care începând cu secțiunea 3.2 discutăm despre compatibilitatea dintre relativitatea generală și ecuațiile lui Maxwell.

3.1. Relativitatea generală

Relativitatea generală este teoria geometrică a gravitației, publicată de Albert Einstein în 1916. Ea constituie descrierea gravitației în fizica modernă, unifică teoria relativității restrânse cu legea gravitației universale a lui Newton, și descrie gravitația ca o proprietate a geometriei spațiului și timpului (spațiu-timp). În particular, curbura spațiu-timp este legată direct de masa-energie și impulsul materiei, respectiv a radiației. Relația fundamentală a teoriei relativității generale este dată de ecuațiile de câmp ale lui Einstein, un sistem de ecuații cu derivate parțiale.

Predicțiile relativității generale diferă semnificativ de cele ale fizicii clasice, mai ales în ce privește structura mărimilor fizice: timpul, metrica spațiului fizic real, energia, dar și asupra teoriei propagării luminii în spațiul fizic. Exemple de astfel de diferențe sunt dilatarea temporală gravitațională, deplasarea spre roșu gravitațională a luminii, și întârzierea gravitațională. Previziunile relativității generale au fost confirmate de observațiile empirice efectuate în toate domeniile științelor experimentale. Deși relativitatea generală nu este singura teorie relativistă a gravitației, ea reprezintă cea mai simplă teorie în acord cu datele experimentale. Totuși, teoria nu oferă răspuns la câteva dileme teoretice, cea mai fundamentală dintre acestea fiind modalitatea în care se poate unifica teoria gravitației generale cu legile mecanicii cuantice, care să conducă la o teorie completă și consistentă cu ea însăși a gravitației cuantice.

Teoria lui Einstein are implicații astrofizice importante. Din ea decurge posibilitatea existenței găurilor negre - regiuni ale Universului în care spațiul și timpul sunt distorsionate într-o măsură atât de pronunțată, încât nimic, nici măcar lumina, nu mai pot emerge de acolo - ca stare finală a evoluției stelelor masive. Există indicii că astfel de găuri negre stelare, precum și alte tipuri mai masive de găuri negre, sunt răspunzătoare pentru radiațiile intense emise de unele tipuri de obiecte astronomice, cum ar fi nucleele galactice active sau microquasarii. Curbura traiectoriei luminii sub efectul gravitației conduce la apariția efectului de lentilă gravitațională, prin care imaginile obiectelor cosmice aflate în spatele

lentele sunt distorsionate sau uneori chiar multiplicat. Relativitatea generală prezice existența undelor gravitaționale, care au fost măsurate indirect. O măsurare directă a acestora este scopul mai multor proiecte, între care și LIGO. În plus, relativitatea generală stă la baza modelelor cosmologice actuale ale unui univers în expansiune.

3.1.1. Ecuațiile lui Einstein

În această parte ne propunem să investigăm construcția unei teorii relativiste de câmp care descrie gravitația. Construcția se bazează pe argumente geometrice și pe cerința ca în limita nerealtivistă să regăsim gravitația newtoniană.

Pentru aceasta, vom porni de la teoria newtoniană a câmpului gravitostatic, dat fiind faptul că aceasta a reprezentat un succes în descrierea mișcării planetelor.

Proprietățile caracteristice ale teoriei newtoniene a câmpului gravitostatic sunt:

- 1). Este o teorie de câmp (câmpul gravitostatic fiind descris printr-un câmp scalar real);
- 2). Sursele câmpului gravitațional sunt corpurile cu masa nenulă;
- 3). Ecuația de câmp este una cu derivate parțiale, liniară și de ordinul II

$$\Delta\varphi = 4\pi G\mu. \quad (3.1.1)$$

În (3.1.1) Δ este operatorul Laplace $\left[\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]$, G este constanta gravitațională (cea care intră în legea atracției gravitaționale $F = \frac{Gm_0M}{r^2}$), iar μ este densitatea volumică de masă.

Teoria relativistă de câmp care descrie gravitația o vom construi pe baza a două cerințe fundamentale:

- I. În aproximația câmpurilor gravitaționale slabe și independente de timp și a vitezelor mici, teoria relativistă să reproducă teoria newtoniană a gravitației;
- II. Teoria relativistă să ofere predicții care să fie verificate experimental.

Cea mai simplă teorie relativistă pentru gravitație ar fi o teorie care să descrie câmpul gravitațional printr-un potențial scalar. Pentru o astfel de teorie sursa câmpului gravitațional trebuie să fie o mărime scalară, expresia relativistă a masei. În relativitatea specială, materia este caracterizată prin tensorul de materie (cunoscut drept cvadritensorul energie-impuls) care este un câmp tensorial de tip (2,0) simetric, notat tradițional cu

$$T^{\mu\nu}. \quad (3.1.2)$$

Conservarea energiei și impulsului este descrisă local prin ecuațiile:

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0, \quad \mu = \overline{0,3}. \quad (3.1.3)$$

Exemplu. În electrodinamica clasică sistemul constituit dintr-un câmp și sursele sale (materie purtătoare de sarcină electrică) este caracterizat de cvadritensorul

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{mat} + T^{\mu\nu}_{em}, \quad (3.1.4)$$

unde $T_{mat}^{\mu\nu}$ caracterizează sursele câmpului electromagnetic, iar $T_{em}^{\mu\nu}$ câmpul electromagnetic. În cazul în care materia purtătoare de sarcină electrică constă într-o colecție de sarcini electrice punctiforme, primul termen din membrul drept al lui (3.1.4) este de sarcini electrice punctiforme, primul termen din membrul drept al lui (3.1.4) este

$$T_{mat}^{\mu\nu} = \sum_a \int dr m_a \frac{dx^\nu}{dt} \delta^4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(\tau)) , \quad (3.1.5)$$

iar al doilea termen (care caracterizează câmpul electromagnetic) este

$$T_{em}^{\mu\nu} = \epsilon_0 c^2 \left[\sigma_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} - \frac{\sigma^{\mu\nu}}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] . \quad (3.1.6)$$

În varietatea scalară a câmpului gravitațional obiectul scalar construit din $T^{\mu\nu}$, care joacă rol de sursă a câmpului gravitațional, este chiar

$$T = \sigma_{\mu\nu} T^{\mu\nu} . \quad (3.1.7)$$

O teorie având ca sursă a câmpului gravitațional urma tensorului de materie (3.1.7) a fost propusă de Nordstöm cațiva ani înaintea formulării relativității generale. Teoria propusă de Nordstöm satisface cerința I, însă predicțiile oferite de aceasta sunt în contradicție cu datele experimentale (nu satisface cerința II).

O teorie vectorială care să descrie relativist câmpul gravitațional (potențialele acestuia să constituie componentele unui câmp vectorial) nu este posibilă deoarece în patru dimensiuni spațio-temporale nu se poate construi în manieră directă din (3.1.2) un câmp vectorial care să constituie sursele câmpului gravitațional.

Urmatoarea posibilitate este să considerăm o teorie tensorială a câmpului gravitațional, în care toate cele zece componente independente ale tensorului energie-impuls să constituie surse ale câmpului gravitațional. Corespunzător acestor situații, potențialele câmpului gravitațional constituie componentele unui câmp tensorial de tip (0,2) simetric. Cea mai simplă idee de a formula o astfel de teorie ar fi o teorie de câmp în spațiul Minkowski. Construcții de astfel de teorii au fost și sunt încă realizate deoarece din punct de vedere matematic sunt teorii mai simple decât relativitatea generală. Cu toate acestea, teoriile care descriu gravitația prin câmpuri tensoriale pe spațiul Minkowski întâmpină dificultăți conceptuale majore. Un alt impediment în considerarea teoriilor menționate constă în alegerea uneia dintre acestea în descrierea gravitației. În relativitatea generală ecuațiile de câmp pentru câmpul gravitațional sunt unic determinate, după cum vom constata ulterior.

Relativitatea generală este teoria gravitației care consideră ca surse ale câmpului gravitațional toate componentele tensorului energie-impuls și care are drept potențiale componentele metricii din universul spațio-temporal $(\mathbf{M}_4, \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{M}_4}, \mathbf{g})$.

Corespunzător descrierii formulate anterior a câmpului gravitațional, legea locală de conservare a energiei și impulsului (3.1.3) devine:

$$T_{;v}^{\mu\nu} = 0, \quad \mu = \overline{0,3} . \quad (3.1.8)$$

3.1.1.1. Ecuatiile de câmp

Ecuatiile de câmp pentru câmpul gravitațional creat de sursele (3.1.2) pot fi scrise generic sub forma

$$E_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}. \quad (3.1.9)$$

În membrul stâng al sistemului (3.1.9) sunt componentele locale ale unui câmp tensorial de tip (0,2) construit din metrica și derivatele cel mult de ordinul II ale acesteia. Doarece în aproximația Newtoniană (3.1.9) trebuie să se reducă (3.1.1), coordonatele locale $E_{\mu\nu}$ trebuie să fie liniare în derivatele de ordinul II ale componentelor metricii. Referitor la astfel de câmpuri tensoriale pe varietăți Riemanniene există rezultatul conținut în următoarea teoremă.

Teorem 1.1.1 *Singurele câmpuri tensoriale netede pe o varietate riemanniană $(M, \mathcal{A}_M, g)$, construite din metrica și derivatele de ordinul unu și doi ale acesteia în raport cu coordonatele și care sunt pătratic în derivatele de ordinul unu și liniare în derivatele de ordinul doi ale metricii, sunt tensorul lui Riemann și contracțiile acestuia.*

Demonstrație. Pe baza teoremei enunțate mai sus, ecuațiile (3.1.9) se scriu generic sub forma:

$$\alpha R_{\mu\nu} + \beta g_{\mu\nu} R + \gamma g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}. \quad (3.1.10)$$

unde α , β , și γ sunt numere reale, și în plus $\alpha \neq 0$ (pentru a asigura cerința I). Ecuatiile (3.1.10) sunt echivalente cu:

$$R_{\mu\nu} + \bar{\beta} g_{\mu\nu} R + \bar{\gamma} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}, \quad (3.1.11)$$

unde am utilizat notațiile:

$$\bar{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha} = \kappa. \quad (3.1.12)$$

Pe de altă parte, tensorul energie-impuls $T_{\mu\nu}$ trebuie să satisfacă (3.1.8) în soluțiile ecuațiilor de câmp (3.1.11), ceea ce conduce la:

$$(R^{\mu\nu} + \bar{\beta} g^{\mu\nu} R + \bar{\gamma} g^{\mu\nu})_{;\nu} \equiv (R^{\mu\nu} + \bar{\beta} g^{\mu\nu} R)_{;\nu} = 0, \quad \mu = \overline{0,3}. \quad (3.1.13)$$

Comparând egalitățile (3.1.13) cu (1.1)¹ identificăm

$$\bar{\beta} = \frac{1}{2}. \quad (3.1.14)$$

Introducând (3.1.14) în (3.1.11) și folosind notația $\bar{\gamma} \equiv \Lambda$ (constanta cosmologică), deducem ecuațiile lui Einstein pentru câmpul gravitațional sub forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}. \quad (3.1.15)$$

¹ (1.1): $R_{;\sigma} - 2g^{\mu\rho} R_{\mu\rho;\sigma} \equiv g^{\mu\rho} (R_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\sigma} R)_{;\sigma} = 0$.

Scrise în termenii tensorului Einstein (1.2)², ecuațiile anterioare au expresia:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}. \quad (3.1.16)$$

Constanta κ , care apare în ecuațiile Einstein (3.1.16), este cunoscută în literatura de specialitate drept constanta *gravitațională relativistă*.

Din (3.1.16) observăm că dacă $\Lambda \neq 0$ și câmpul gravitațional nu are surse ($T_{\mu\nu} = 0$, $\forall \mu, \nu = \overline{0,3}$), atunci metrica Minkowski nu este soluție a ecuațiilor Einstein. Inițial, Einstein a scris ecuațiile (3.1.16) fără termenul cosmologic ($\Lambda = 0$). Interpretarea cosmologică în acest caz a soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale corespunzătoare a condus (în funcție de condițiile la limită alese) la un Univers fie în contracție, fie în expansiune. Adăugarea termenului cosmologic permite identificarea de soluții ale ecuațiilor (3.1.16), care descriu un Univers static.

Doarece nu avem în vedere abordarea problemei cosmologice, vom considera ecuațiile Einstein fără constanta cosmologică

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}. \quad (3.1.17)$$

Ecuatiile pentru vid

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = \overline{0,3} \quad (3.1.18)$$

admit ca soluție metrica Minkowski. Prin calcul direct se obține simplu ca în cazul vidului ecuațiile:

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}. \quad (3.1.19)$$

Din punct de vedere dinamic, potențialele câmpului gravitațional sunt câmpuri gauge (asemenea potențialelor câmpului electromagnetic $(A_\mu)_{\mu=\overline{0,3}}$) și pentru a rezolva (3.1.18) trebuie să fixăm etalonarea (ecuațiile (3.1.18) nu sunt independente (1.3)³). Fixarea etalonării se face prin alegerea unor hărți locale preferențiale din $\tilde{\mathcal{A}}_{M_4}$ în care metrica satisface condițiile:

$$\Gamma^\mu \equiv g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0, \quad \mu = \overline{0,3}. \quad (3.1.20)$$

Coordonatele preferențiale în care componentele metricii satisfac condițiile (3.1.20) se numesc coordonate armonice.

² (1.2): $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, constituie componentele unui câmp tensorial neted de tip (0,2) care se numește tensorul lui Einstein.

³ (1.3): $G_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$, forma compactă a relațiilor (1.1).

3.1.1.2. Limita newtoniană a ecuațiilor lui Einstein

În această secțiune vom analiza limita newtoniană a ecuațiilor Einstein (3.1.17) pentru a determina legătura dintre constanta atracției universale (constanta G care apare în ecuația satisfăcută de potențialul câmpului gravitativ φ) și factorul κ care apare în ecuațiile Einstein. În limita newtoniană sursa câmpului gravitațional constă într-o distribuție de materie aflată în repaus. În această situație cvadritensorul energie-impuls are o singură componentă nenulă

$$T_{00} = \mu c^2 . \quad (3.1.21)$$

Contractând (3.1.17) cu $g^{\mu\nu}$ și folosind expresia cvadritensorului energie-impuls în acest caz (singura componentă nenulă a acestuia fiind (3.1.21)), obținem

$$R = -\kappa T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} , \quad (3.1.22)$$

sau echivalent

$$R = -\kappa \mu c^2 (-1 - h^{00}) . \quad (3.1.23)$$

Introducem (3.1.23) în membrul stâng al ecuațiilor (3.1.19) și pentru $\mu = \nu = 0$ determinăm

$$R_{00} = \frac{\kappa}{2} \mu c^2 . \quad (3.1.24)$$

În aproximația considerată

$$R_{00} = g^{\mu\nu} R_{0\mu 0\nu} = g^{ij} R_{0i 0j} = \partial_i \Gamma_{00}^i = \partial_i \left(-\frac{1}{2} g_{00,i} \right) . \quad (3.1.25)$$

Înlocuind (3.1.4) în (3.1.25) obținem imediat că

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta \varphi . \quad (3.1.26)$$

Introducând (3.1.26) în (3.1.24) și comparând rezultatul obținut cu (3.1.1), determinăm legătura dintre constantele G și κ de forma:

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} . \quad (3.1.27)$$

Din (3.1.27) constatăm că valoarea constantei gravitaționale relativiste, responsabilă pentru interacția gravitațională, este foarte mică ($\kappa \sim 10^{-47}$) și nu este adimensională. Valoarea foarte mică a constantei gravitaționale relativiste implică faptul că interacția gravitațională este foarte slabă. Existența dimensiunii constantei de cuplaj κ induce neronormabilitatea teoriei cuantice de câmp cu limita clasică dată de formularea Hilbert-Einstein.

3.1.2. Formulări lagrangiene ale câmpului gravitațional

În această secțiune vom prezenta o formulare echivalentă a câmpului gravitațional privit drept câmp dinamic. Mai precis, vom enunța formularea Hilbert-Einstein în derivate ale câmpului gravitațional. În cadrul acestei formulări vom calcula ecuațiile de evoluție (care derivă din principiul variațional bazat pe o acțiune lagrangiană) și vom evidenția transformările gauge.

Formularea Hilbert-Einstein

În cadrul acestei formulări potențialele câmpului gravitațional sunt reprezentate de componentele locale $g_{\mu\nu}$ ale metricii pe o varietate riemanniană $(\mathbf{M}_4, \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{M}_4}, \mathbf{g})$. Câmpul gravitațional este unul *dinamic*.

La nivel lagrangian acesta este descris prin acțiunea

$$S^{\text{HE}}[g_{\mu\nu}] = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x e R, \quad (3.1.28)$$

unde am utilizat notația

$$e = \sqrt{-g}, \quad g = \det(g_{\mu\nu}). \quad (3.1.29)$$

În continuare vom obține ecuațiile Einstein (3.1.18) din principiul variațional bazat pe acțiunea (3.1.28). Din (3.1.28) identificăm densitatea de Lagrangian.

$$\mathcal{L}^{\text{HE}} = \frac{2}{\kappa^2} e R. \quad (3.1.30)$$

Deoarece în densitatea de Lagrangian (3.1.30) apar metrica nederivată și derivatele de ordinal I și II ale metricii, ecuațiile Euler-Lagrange corespunzătoare sunt:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} + \partial_\rho \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial (\partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu})} = 0, \quad \mu, \nu = \overline{0,3}. \quad (3.1.31)$$

Utilizând densitatea de Lagrangian (3.1.30), primul termen din membrul stâng al ecuației (3.1.31) este:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial g_{\mu\nu}} &= \frac{\partial}{\partial g_{\mu\nu}} (e g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} R_{\alpha\gamma|\beta\delta}) = \frac{\partial e}{\partial g_{\mu\nu}} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} R_{\alpha\gamma|\beta\delta} + 2e \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} g^{\gamma\delta} R_{\alpha\gamma|\beta\delta} \\ &+ e g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \frac{\partial R_{\alpha\gamma|\beta\delta}}{\partial g_{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

Pe baza definiției determinantului unei matrici

$$g = \sum_{\sigma \in S(4)} (-)^{\sigma} g_{0\sigma(0)} g_{1\sigma(0)} g_{2\sigma(0)} g_{3\sigma(0)}, \quad (3.1.33)$$

și a metodei de construcție a inversei unei matrici, obținem că

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}, \quad (3.1.34)$$

ceea ce conduce la

$$\frac{\partial e}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} e g^{\mu\nu}. \quad (3.1.35)$$

Pentru a calcula $\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}}$, derivăm (1.4)⁴ în raport cu $g_{\alpha\beta}$ și determinăm

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial g_{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2} g^{\alpha(\mu} g^{\nu)\beta}. \quad (3.1.36)$$

Utilizând (1.5)⁵ și (3.1.36) găsim că:

$$\frac{\partial R_{\alpha\gamma|\beta\delta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g^{\tau(\mu} g^{\nu)\pi} (\Gamma_{\tau\alpha\delta} \Gamma_{\pi\gamma\beta} - \Gamma_{\tau\alpha\beta} \Gamma_{\pi\gamma\delta}). \quad (3.1.37)$$

Înlocuind (3.1.35), (3.1.36) și (3.1.37) în (3.1.32), de unde obținem pentru primul termen din membrul stâng al sistemului (3.1.31) expresia:

$$\frac{\kappa^2}{2} - \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} e g^{\mu\nu} R - 2e R^{\mu\nu} - e g^{\tau\mu} g^{\nu\pi} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} (\Gamma_{\tau\alpha\delta} \Gamma_{\pi\gamma\beta} - \Gamma_{\tau\alpha\beta} \Gamma_{\pi\gamma\delta}). \quad (3.1.38)$$

Contribuția celui de-al doilea termen din membrul stâng al sistemului (3.1.31) se datorează prezenței în tensorul Riemann a produselor de simboluri Cristoffel de speța I

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{2} \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} &= \partial_\rho \left[e g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} (\Gamma_{\tau\alpha\delta} \Gamma_{\pi\gamma\beta} - \Gamma_{\tau\alpha\beta} \Gamma_{\pi\gamma\delta}) \right] = \\ &= \partial_\rho \left[2e g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \left(\Gamma_{\gamma\alpha\beta} \frac{\partial \Gamma_{\pi\gamma\delta}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} \right) - \Gamma_{\tau\alpha\beta} \frac{\partial \Gamma_{\pi\gamma\delta}}{\partial (\partial_\rho g_{\mu\nu})} \right] = \\ &= \partial_\rho \left[e \left(\Gamma_{\tau\alpha\delta} (g^{\alpha\mu} g^{\rho\delta} g^{\tau\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\rho\delta} g^{\tau\mu} - g^{\alpha\nu} g^{\mu\delta} g^{\tau\rho}) - \Gamma_{\tau\alpha\beta} (g^{\alpha\beta} g^{\rho\mu} g^{\tau\nu} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g^{\alpha\beta} g^{\rho\nu} g^{\tau\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g^{\tau\rho}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

Contribuția celui de-al treilea termen din membrul stâng al sistemului (3.1.31) se datorează prezenței în tensorul Riemann a derivatelor de ordinal II ale metricii

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{2} \partial_\rho \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial (\partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu})} &= \partial_\rho \partial_\lambda \left[e g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial (\partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu})} \left(\frac{1}{2} \partial_\delta \partial_\alpha g_{\gamma\beta} - \frac{1}{2} \partial_\beta \partial_\alpha g_{\gamma\delta} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{2} \partial_\delta \partial_\gamma g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \partial_\beta \partial_\gamma g_{\alpha\delta} \right) \right] = \partial_\rho \partial_\lambda [e (g^{\rho\mu} g^{\lambda\nu} - g^{\rho\lambda} g^{\mu\nu})] = \partial_\rho [(\partial_\lambda e) (g^{\rho\mu} g^{\lambda\nu} - \\ &\quad g^{\rho\lambda} g^{\mu\nu}) + e (g^{\lambda\nu} g^{\rho\mu} + g^{\rho\mu} \partial_\lambda g^{\lambda\nu} - g^{\mu\nu} \partial_\lambda g^{\rho\lambda} - g^{\rho\lambda} \partial_\lambda g^{\mu\nu})] \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

Utilizând aceleași argumente ca în cazul derivării relațiilor (3.1.36), se obține simplu că:

$$\partial_\lambda g^{\rho\mu} = -g^{\rho\tau} (\partial_\lambda g_{\tau\pi}) g^{\pi\mu}. \quad (3.1.41)$$

⁴ (1.4): $C_j^i : (\xi_{(r,s)}(M)) \rightarrow \Gamma(\xi_{(r-1,s-1)}(M))$, este o aplicație $\mathcal{F}(M)$ -liniară reprezentând contracția unui câmp tensorial neted $\mathbf{T} \in \Gamma(\xi_{r,s}(M))$ după indicii $i \in \overline{1, r}$ și $j \in \overline{1, s}$.

⁵ (1.5): $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu|\nu\beta}$, ($R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$), reprezintă tensorul Ricci (curbura scalară)

De asemenea, folosind același algoritm ca cel utilizat în stabilirea relațiilor (3.1.34), determinăm

$$\partial_\lambda g = g g^{\tau\pi} \partial_\lambda g_{\tau\pi} , \quad (3.1.42)$$

ceea ce conduce, pe baza regulii de derivare a funcțiilor compuse, la

$$\partial_\kappa e = \frac{1}{2} e g^{\tau\pi} \partial_\lambda g_{\tau\pi} . \quad (3.1.43)$$

Înlocuind (3.1.41) și (3.1.43) în (3.1.40), obținem pentru $\partial_\rho \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial(\partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu})}$ următoarea formă:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{2} \partial_\rho \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial(\partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu})} = \partial_\rho \left[\frac{1}{2} e (g^{\rho\mu} g^{\alpha\nu} g^{\tau\pi} (\partial_\alpha g_{\tau\pi} - 2\partial_\tau g_{\pi\alpha}) - g^{\rho\tau} g^{\pi\mu} g^{\alpha\nu} (2\partial_\alpha g_{\tau\pi} - \right. \\ \left. 2\partial_\tau g_{\pi\alpha}) - g^{\rho\tau} g^{\alpha\pi} g^{\mu\nu} (\partial_\tau g_{\alpha\pi} - 2\partial_\alpha g_{\tau\pi})) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

Pe baza relațiilor (3.1.38), (3.1.39) și (3.1.44), expresia efectivă a membrului stâng al sistemului (3.1.31) devine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{RE}}}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} + \partial_\rho \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\partial(\partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu})} = \frac{2}{\kappa^2} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} \right) . \quad (3.1.45)$$

Datorită nedegenerării metricii ($g \neq 0$) și a identităților (3.1.45), ecuațiile (3.1.31) sunt echivalente cu:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0 , \quad \mu, \nu = \overline{0,3} . \quad (3.1.46)$$

Ecuațiile (3.1.46) sunt chiar ecuațiile Einstein pentru câmpul gravitațional în absența (materiei) (3.1.18).

În continuare investigăm transformările gauge ale acțiunii (3.1.28). Am determinat anterior derivatele variaționale ale densității de Lagrangian (3.1.30) (identitatea (45)) sub forma:

$$\frac{\delta \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\delta g_{\mu\nu}} \equiv -\frac{2}{\kappa^2} e G^{\mu\nu} . \quad (3.1.47)$$

Calculăm divergența

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{;\nu} \equiv -\frac{2}{\kappa^2} (e_{;\nu} G^{\mu\nu} + e G^{\mu\nu}_{;\nu}) . \quad (3.1.48)$$

Folosind identitățile (1.3), membrul drept al relațiilor (3.1.48) devine:

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{;\nu} \equiv -\frac{2}{\kappa^2} G^{\mu\nu} e_{;\nu} . \quad (3.1.49)$$

Vom demonstra că derivatele covariante ale mării e în raport cu coordonatele asociate unei harti locale sunt nule. Deoarece marea menționată anterior este un câmp neted de pseudoscalari, derivatele covariante ale acesteia sunt exprimate prin:

$$e_{;\mu} = e_{,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} e . \quad (3.1.50)$$

Folosind definițiile (1.6)⁶ ale simbolurilor Christoffel de speța a II-a, obținem

$$\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} = \frac{1}{2g} g_{,\mu} = -\frac{e}{g} \partial_{\mu} e . \quad (3.1.51)$$

Înlocuind (3.1.51) în membrul drept al egalităților (3.1.50), pe baza definițiilor (3.1.29) avem că:

$$e_{;\mu} = 0 . \quad (3.1.52)$$

Introducem (3.1.52) în (3.1.49) și determinăm identitățile

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}^{\text{HE}}}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{;\nu} \equiv 0 , \quad (3.1.53)$$

numite identități Noether ale acțiunii Hilbert-Einstein (3.1.28). Aceste identități sunt expresia invarianței acțiunii (3.1.28) la transformările gauge infinitesimale

$$\delta_{\epsilon} g_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu;\nu} + \epsilon_{\nu;\mu} , \quad (3.1.54)$$

unde $(\epsilon_{\mu})_{\mu=\overline{0,3}}$ sunt coordonatele locale ale unui câmp tensorial infinitesimal arbitrar de tip (0,1).

Ecuatiile Einstein cu constanta cosmologică și în absența surselor (ecuațiile (3.1.15) în care punem $T_{\mu\nu} = 0$) pot fi obținute din principiul variațional bazat pe acțiunea:

$$\bar{S}^{\text{HE}}[g_{\mu\nu}] = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x e (R - 2 \wedge) . \quad (3.1.55)$$

⁶ (1.6): $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}(\mathbf{x}) = g^{\mu\lambda}(\mathbf{x}) \Gamma_{\lambda\nu\rho}(\mathbf{x})$, simbolurile Christoffel de speța a II-a.

3.2. Compatibilitatea dintre relativitatea generală și ecuațiile lui Maxwell

3.2.1. Introducere

Investigația lui Einstein asupra gravitației a început în articolul lui "review" din 1907 [3]. El a discutat despre multe aspecte ale relativității acolo și a propus ca axioma relativității speciale - că legile fizicii sunt valabile în toate sistemele de coordonate inerțiale - să fie extinsă și la sistemele de coordonate accelerate. El a numit aceasta principiul echivalenței, care spune că un observator nu poate detecta diferența dintre un câmp de forță și un sistem de referință accelerat. Într-un experiment *gedanken* (de gândire), el a poziționat două ceasuri identice pe o linie, unul în accelerație uniformă, al doilea fixat într-un câmp gravitațional uniform. Presupunând că cele două ceasuri sunt sincronizate, el a arătat printr-un argument în întregime matematic că rata timpului ceasului staționar depinde numai de potențialul gravitațional.

Intuiția și determinarea lui Einstein l-au condus, în cele din urmă, la un sistem de ecuații diferențiale parțiale care combină două cantități necunoscute, tensorul metric al continuumului spațio-temporal, și tensorul energie-impuls reprezentând termenul de sursă fizică care provoacă spațiul-timp să se curbeze. Tensorul energie-impuls nu este determinat prin principiul echivalenței, dar Einstein nu avea nevoie de el în cele două probleme pe care le tratase; pentru că prin experimentul său *gedanken* el știa că componenta temporală a tensorului metric a fost ca prima dată de a produce o perturbare a metricii Minkowski prin adăugarea potențialului gravitațional φ . Sursa a fost în mod clar masa Soarelui, care ar putea fi considerată o sursă punctuală; Einstein a susținut că aproximarea primului ordin a fost suficient, și astfel a obținut soluția la problema sa.

Dar cum modelăm câmpuri gravitaționale intense generate de obiectele în mișcare, de exemplu, o stea binară sau coliziunea a două găuri negre? Sau câmpuri concurente, cum ar fi câmpurile electromagnetice și gravitaționale din interiorul unei stele?

Tensorul energie-impuls este fundamental pentru modelarea unor astfel de probleme. El a fost determinat în mod unic în formularea lui Hilbert a relativității generale ca o problemă în calculul variațiilor în varietatea spațio-temporală (vezi secț. 3.2.3). Dar a existat o problemă: s-a dovedit a fi tensiunea clasică Maxwell de energie-impuls și ecuațiile lui Maxwell erau văzute ca fiind specifice câmpului electromagnetic. Aceasta conduce la o "cuplare" inexplicabilă a câmpurilor gravitaționale și electromagnetice.

Ecuațiile lui Einstein, cu tensiunea clasică Maxwell pentru câmpul electromagnetic ca tensor de energie-impuls, sunt numite ecuațiile Einstein-Maxwell. Einstein însuși a discutat despre tensorul de impuls Maxwell pentru electromagnetism ca un exemplu de tensor covariant de energie-impuls; dar deoarece a identificat geometria spațiului-timp cu câmpul gravitațional, el nu a propus tensorul pentru ecuațiile sale. Scepticismul său în utilizarea tensorului de impuls Maxwell ca tensorul energie-impuls în teoria sa a gravitației a fost justificat; nu are sens să susținem că câmpul electromagnetic generează câmpul gravitațional.

Cu toate acestea, ecuațiile Einstein-Maxwell apar în mod repetat în întreaga literatură de specialitate. O încercare timpurie de a combina electromagnetismul și gravitația într-o singură teorie relativistă a apărut în Nordström [15], precedând atât pe Hilbert, cât și pe Einstein. În urma publicării teoriei lui Einstein și a construcției lui Schwarzschild a elementului de linie asociat, Reissner [21] și Nordström [16] au obținut în mod independent tensori metrici pentru ecuațiile Maxwell-Einstein pentru opțiuni speciale ale câmpului electromagnetic care intenționează să reprezinte câmpul gravitațional generat de către corpuri sferice, atât cu masă cât și cu sarcină. Metrica asociată este cunoscută ca

Metrica Reissner-Nordström [25] Wald, Cap. 6, Problema 3. Tensorii metrici pentru ecuațiile Einstein-Maxwell stau la baza teoriei moderne a găurilor negre (vezi secțiunea 12.3 Wald).

Această discrepanță între teorie și practică este rectificată de Teorema 3.2.2.1, care demonstrează că ecuațiile lui Maxwell sunt universale, independente de natura fizică a sursei de material care generează câmpul. Urmează apoi Teorema 3.2.2.2 care folosind metoda variațională a lui Hilbert combinată cu universalitatea ecuațiilor lui Maxwell pentru a obține o formulare a relativității generale bazată pe câmpuri Maxwelliane, în loc de câmpuri de forță specifice.

Există o a doua problemă cu formularea lui Einstein a teoriei sale. În [4], el a declarat:

"Conform teoriei generale a relativității, gravitația ocupă o poziție excepțională în raport cu alte forțe, în special forțele electromagnetice, deoarece cele zece funcții care reprezintă câmpul gravitațional în același timp definesc proprietățile metrice ale spațiului măsurat. "

Această premisă a plasat câmpurile electromagnetice și gravitaționale pe poziții incompatibile - câmpul gravitațional ca structură riemanniană în spațiu-timp, câmpul electromagnetic ca teorie de câmp liniar pe spațiul Minkowski. Din acest punct de vedere, Kaluza [9] a modificat lucrarea lui Nordström și a lui Reissner pentru a obține o unificare a gravitației și a electromagnetismului în conformitate cu premisa lui Einstein. Ca și Hilbert, teoria lui Kaluza s-a bazat pe o metodă variațională.

Electromagnetismul și gravitația diferă cu siguranță la nivel microscopic: interacțiunea câmpului cu materia, de exemplu legile lui Snell de reflexie și refracție în electromagnetism; și în interacțiunile subatomice. Dar premisa lui Einstein nu este susținută de nici un experiment fizic în cazul macroscopic și este contrazisă de Teorema 3.2.2.1.

Teorii relativiste ale gravitației construite pe ecuațiile lui Maxwell și invarianța lui Lorentz sunt văzute la Heaviside [7], Lorentz [12] și Poincaré [20]. Teorema 3.2.2.1 nu trebuie a fi interpretată ca dovadă că ecuațiile lui Maxwell sunt un model fizic valabil pentru gravitație. Dimpotrivă: noțiunile actuale despre rolul ecuațiilor lui Maxwell trebuie să fie reexaminat. Ele sunt doar modele aproximative ale teoriei câmpului - atât în cazul electromagnetic cât și în cazul gravitației - valabile pentru câmpurile slabe. Efectele curburii devin vizibile în prezența câmpurilor puternice.

Atunci când Teorema 3.2.2.1 este încorporată în metoda variațională a lui Hilbert, tensorul de energie-impuls Maxwell asociat cu câmpul în cauză se consideră a fi tensorul unic de energie-impuls care va fi folosit în ecuațiile relativității generale. Așadar, ecuațiile lui Maxwell stau la baza determinării tensorului de energie-impuls.

Universalitatea ecuațiilor lui Maxwell pune toate câmpurile de forță generate de o sursă materială pe poziții compatibile, conducând la o teorie unificată a câmpului în care structura geometrică a teoriei lui Einstein nu mai este specifică niciunui câmp de forță fizică. În schimb, este mecanismul de transmitere și interacțiune a forțelor fizice prin curbarea continuumului spațiu-timp.

Aceste rezultate au consecințe semnificative pentru relativitatea generală. Deoarece tensorul corect de energie-impuls nu a fost folosit niciodată, o bună parte din teorie va trebui reexaminată. De exemplu, corpul vast de cercetare privind colapsul gravitațional se ocupă numai cu câmpul gravitațional și ignoră câmpul electromagnetic concurențial (vezi secț. 3.2.4); întrucât stabilitatea și colapsul gravitațional final al unei stele sunt consecințele câmpurilor concurente, de exemplu câmpurile electromagnetice și gravitaționale.

Din punct de vedere istoric, Maxwell a derivat ecuațiile sale dinamice pentru câmpul electromagnetic folosind legile empirice ale electromagnetismului, în special legea lui Faraday de inducție electromagnetică. În timp ce teoria originală a fost considerabil simplificată, toate derivările existente se bazează într-un fel sau altul pe Legea lui Faraday.

Este esențial pentru abordarea invariantă a lui Hilbert față de relativitatea generală ca ecuațiile lui Maxwell să fie invariante sub întregul grup de difeomorfism al spațiului-timp. Formularea lui Minkowski a acestora este limitată la spațiul-timp Minkowski, unde grupul de invarianță este grupul Poincaré. Această formulare este ușor extinsă pentru a obține reprezentarea tensorială a ecuațiilor lui Maxwell și a fost cunoscută atât de Einstein, cât și de Hilbert. Lagrangianul invariant este dat în ecuația (3.2.7); și forma invariantă (tensorială) a ecuațiilor este dată în (3.2.38), secț. 3.2.9.

Forma vectorială a ecuațiilor, sistemul cuplat al ecuațiilor diferențiale parțiale pentru $\mathbf{E}$ și $\mathbf{B}$, poate fi obținut direct din formularea lui Minkowski. Forma vectorială a ecuațiilor este cea mai simplă formă a ecuațiilor lui Maxwell și este omniprezentă în literatura de specialitate, de ex. [5,10,14].

Teoria lui Hodge este limbajul natural al teoriei potențiale, iar ecuațiile lui Maxwell au structura unei probleme de potențial pe spațiul-timp 4-dimensional Minkowski.

Misner et al. [14] au obținut ecuațiile lui Maxwell în limbajul teoriei Hodge direct din forma lor vectorială. Deoarece aceste ecuații sunt specifice câmpului electromagnetic, această derivare nu stabilește universalitatea. Pentru a dovedi universalitatea, trebuie să derivăm ecuațiile în mod direct, folosind Legea lui Faraday. Acest lucru se face în secțiunea 3.2.6 prin înlocuirea legilor lui Faraday și Maxwell-Ampère prin cele două ipoteze ale lui Einstein de relativitate specială. Se constată că ambele legi sunt valabile pentru toate câmpurile maxwelliane; acestea nu sunt presupuse în prealabil, ci urmează ca corolare matematice a relativității speciale. Derivarea se bazează pe 2-forme care corespund legilor Maxwell-Ampère și Faraday; iar dualitatea Hodge joacă un rol substanțial în demonstrație.

Pentru a extinde universalitatea la formele tensoriale și vectoriale ale ecuațiilor, este suficient să se arate că formularea lui Minkowski poate fi obținută direct din forma lui Hodge a ecuațiilor; aceasta se face în secț. 3.2.7.

Metrica Schwarzschild este o soluție singulară pentru ecuațiile lui Einstein - ecuațiile Euler - Lagrange pentru "Riemannische Krümmungsinvariant" (Curbura scalară Rici). Este o soluție la problema variațională a lui Hilbert? Nici macar nu este clar că integrala există, datorită singularității Schwarzschild. Analiza matematică a unor astfel de singularități joacă un rol central în cosmologia modernă, în special teoria găurilor negre (Wald, capitolele 9 și 12).

Paradigma lui Hilbert, așa cum se realizează în Teorema 3.2.2.2, deschide calea unei abordări matematice alternative a cosmologiei, bazată pe calculul variațiilor. Unele exemple sunt discutate pe scurt în secț. 3.2.3.z

3.2.2. Declarații teoretice

Se spune că un câmp de forță F este generat de o sursă de material constând dintr-o densitate ρ și current J , ambii compact suportați, astfel încât:

$$\rho_t + \operatorname{div} \cdot J = 0 ; \quad (3.2.1)$$

$$\nabla \times F = J , \quad \operatorname{div} \cdot F = \rho . \quad (3.2.2)$$

Presupunem în plus că ecuațiile dinamice satisfac cele două axiome ale relativității speciale ale lui Einstein [2] - că ecuațiile sunt valabile în toate sistemele inerțiale și că există o viteză universală c care este aceeași valoare în toate aceste sisteme. Câmpurile de forță care satisfac aceste postulate vor fi numite câmpuri maxwelliene.

Teorema 3.2.2.1. *Într-un mediu izotrop și omogen, ecuațiile câmpului electromagnetic nu sunt specifice câmpului electromagnetic, ci cuprind mai degrabă o teorie matematică a câmpurilor maxwelliene, indiferent de natura fizică a sursei lor.*

Ecuatiile câmpului dinamic sunt ecuațiile lui Maxwell, iar legile lui Maxwell - Ampère și Faraday sunt corolări matematice ale teoriei, valabile pentru toate câmpurile de forță, indiferent de natura lor fizică.

Teorema 3.2.2.1 este de interes matematic în aceea că demonstrația ei constituie prima derivare matematică a ecuațiilor lui Maxwell bazată mai degrabă pe principii, decât pe legi empirice precum cele ale lui Faraday. Semnificația sa fizică este esențială pentru demonstrarea teoremei 3.2.2.2 de mai jos. Această teoremă arată, printre altele, că ecuațiile lui Maxwell pentru gravitație sunt necesare pentru determinarea corectă a tensorului energie - impuls al teoriei lui Einstein. Acest lucru va fi explicat în secț. 3.2.3.

Teorema 3.2.2.2. *Ecuatiile lui Maxwell interacționează cu ecuațiile lui Einstein a relativității generale folosind metoda variațională a lui Hilbert.*

Tensorul energie-impuls este determinat în mod unic, iar teoria relativității generale poate fi formulată în termeni de câmpuri maxwelliene, în loc de câmpuri de forță specifice .

Potențialele Maxwell corespunzătoare câmpurilor de forță distincte pot fi suprapuse, conducând la o teorie unificată a câmpului .

Teorema 3.2.2.2 va fi demonstrată în secțiunea 3.2.3. O teorie unificată a câmpului este esențială în modelarea structurilor masive cu câmpuri electromagnetice interne, cum ar fi o stea (secț. 3.2.4). Teorema arată nu numai că ecuațiile lui Maxwell sunt relevante pentru gravitație, dar și faptul că relativitatea generală este relevantă în cazul în care câmpul electromagnetic este intens, de exemplu, în interiorul unei stele sau al universului timpuriu.

Pentru demonstrația teoremei 3.2.2.1 se utilizează substanțial teoria Hodge. Un rezumat al ideilor de bază este prezentat în secț. 3.2.9. Ecuatiile statice necesită conservarea materialului și sunt obținute în secț. 3.2.5 ca o aplicare a teoremei de descompunere Hodge pe $\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^3$. Doi parametri ϵ, μ apar în teoria statică, iar în cursul derivării ecuațiilor dinamice obținem:

$$\mu\epsilon = \frac{1}{c^2} . \quad (3.2.3)$$

Ecuția (3.2.3) a fost esențială pentru demonstrația lui Maxwell că lumina este un fenomen electromagnetic. Parametrii ϵ și μ sunt, de asemenea, esențiali pentru dovada universalității.

Prin (3.2.3) ecuațiile lui Maxwell în prezența unei surse de material formează o familie de ecuații uniparametrice, etichetate de μ . Parametrul ϵ este conectat cu legea lui Gauss pentru componenta conservatoare a câmpului de forță și este dat de $4\pi/G$, unde G este constanta forței asociată cu legea pătratică inversă și este pozitivă pentru forțe respingătoare și negativă pentru forțe atractive cf. sect. 3.2.5. Din (3.2.3), avem

$$\mu = \frac{4\pi G}{c^2}. \quad (3.2.4)$$

3.2.3. Universalitatea relativității generale

Einstein folosește cuvântul gravitație în lucrarea sa din 1907, dar argumentul său este în întregime matematic și se extinde cu ușurință la orice câmp de forțe conservative. De ce ar trebui atunci ca principiul echivalenței să se aplice câmpului gravitațional, dar nu câmpului electromagnetic? Și de ce ar trebui ca propoziția - că legile fizicii să fie aceleași în orice sistem de coordonate - să se aplice gravitației, dar nu electromagnetismului? El nu spune nimic despre asta și construiește teoria relativității generale pe premisa că "gravitația ocupă o poziție excepțională în raport cu alte forțe, în special forțele electromagnetice ...", o premisă contrazisă de teorema 3.2.2.1.

Einstein [4] arată că invarianța, împreună cu principiul echivalenței, conduce prin considerații pur matematice la ecuațiile câmpului pe o varietate semi-riemmaniană cu legea de mișcare a lui Newton înlocuită de geodezică. Dar tensorul energie-impuls nu este determinat de metode geometrice. Einstein introduce tensorul ca fiind termenul sursă pentru ecuațiile câmpului geometric, în mod analog cu sursa de material din ecuațiile lui Maxwell. El discută două exemple fizice - tensorul energie-impuls al unui gaz adiabatic fără frecări și tensorul de impuls Maxwell pentru câmpul electromagnetic. Acest tensor nu este propus de Einstein în ecuațiile sale.

Lipsa unui tensor de impuls definitiv a condus la discuții ample în literatura de specialitate despre posibili tensori de energie-impuls, toate bazate pe argumente fizice, de exemplu [10,14,26]. O abordare comună este de a însuma tensorii energie-impuls ale particulelor individuale. Există discuții ample în literatura de specialitate, care compară abordările lui Einstein și Hilbert pentru obținerea tensorului de energie-impuls. Vezi capitolele 17 și 21 din Misner, Thorne și Wheeler. Capitolul 21 este dedicat unei discuții despre abordarea variațională a lui Hilbert. Această metodă este singurul cadru matematic cunoscut pentru determinarea tensorului de energie-impuls.

Abordarea lui Hilbert la relativitatea generală [8] se bazează pe un principiu de acțiune și pe doi invarianți, $\mathcal{K}$ și $\mathcal{L}$. Primul este "Riemannsche Krümmungsinvariant" (mai bine cunoscut sub numele de curbura scalară Ricci R), $\mathcal{K} = \iint K \sqrt{g} d\omega$, unde

$$K = g^{jk} K_{jk}, \quad K_{jk} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ri}^i \Gamma_{jk}^r - \Gamma_{rk}^i \Gamma_{ji}^r. \quad (3.2.5)$$

Γ_{jk}^i sunt simbolurile Christoffel; iar $\sqrt{g} d\omega$ este elementul de volum invariant, unde $g = \det\|g_{ij}\|$ și $d\omega = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$.

Al doilea este $\mathcal{L} = \iint L \sqrt{g} d\omega$, unde L este Lagrangianul unui sistem fizic cu coordonatele q_i și derivatele lor $q_{i,j}$, invariante sub un grup de diomorfisme de spațiu-timp. Hilbert combină cei doi invarianți ca sumă; dar pentru a ne conforma cu formularea lui Einstein a ecuațiilor, luăm $\mathcal{H} = \mathcal{K} - \zeta \mathcal{L}$. (Parametrul ζ poate fi calculat până la un număr pur prin analiză dimensională sect. 3.2.8).

Ecuatiile relativității generale sunt date de principiul acțiunii $\delta \mathcal{H} = 0$, unde variațiile sunt preluate atât de variabilele fizice q_i , cât și de variabilele geometrice constând din simbolurile $q_{i,j}$ și simbolurile lui Christoffel. Tensorul energie-impuls este obținut din derivata variațională

$$T_{mn} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{mn}}. \quad (3.2.6)$$

Hilbert calculează tot invarianții și constată că cel mai simplu caz este cel în care L este Lagrangianul pentru ecuațiile lui Maxwell în spațiu liber. Scriind $q_i = A_i$, 4-potențialul Maxwell, avem:

$$L = F_{ij} F^{ij}, \quad F^{ij} = g^{ik} g^{jl} F_{kl}, \quad F_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}.$$

Expresia L este obținută ca o extensie a coordonatelor generale ale Lagrangianului lui Minkowski pe spațiul Minkowski $\mathfrak{M}^4$ al ecuațiilor lui Maxwell în spațiu liber.

Einstein și Hilbert își bazează calculele pe lucrarea lui Minkowski; dar Einstein îi extinde pentru a include termenii sursă, în timp ce Hilbert nu o face. Rezultatul este că tensorul energie-impuls obținut de Einstein este specific câmpului electromagnetic; în timp ce cel obținut de Hilbert este specific ecuațiilor lui Maxwell în spațiul liber.

Susținem că ecuațiile lui Maxwell în spațiul liber nu ar trebui să fie considerate specifice câmpului electromagnetic. Atunci când este scris în limbajul teoriei Hodge, ca în sect. 3.2.6, ele iau forma $dF = 0$, $\delta F = 0$, unde F este o 2-formă pe spațiul-timp 4-dimensional Minkowski $\mathfrak{M}^4$. Adică, F este o 2-formă armonică, un obiect pur matematic. Pentru a pune acest lucru în perspectivă, luăm ecuația $\Delta \phi = 0$ în $\mathbb{E}^3$. Ce câmp fizic reprezintă gradientul $-\Delta \phi$? Nu avem informații. Pe de altă parte, considerăm ecuația lui Poisson $\Delta \phi = -\rho/\epsilon$, unde ρ este o densitate și ϵ este parametrul de putere asociat cu legea lui Gauss. Acum $-\nabla \phi$ este câmpul de forță indus de ρ .

Lagrangianul asociat este (sect. 3.2.7):

$$L = -\frac{1}{4} F_{jk} F^{jk} + \mu A_i J^i. \quad (3.2.7)$$

Tensorul energie-impuls obținut din (3.2.6) este calculat explicit în sec. 3.2.8:

$$T_{mn} = \frac{1}{2} \left(-F_{mj} F_n^j + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} g_{mn} \right) + \mu \left(A_m J_n - \frac{1}{2} g_{mn} A_i J^i \right). \quad (3.2.8)$$

Până la un multiplu scalar, primul termen, patrat în F_{ij} , este tensorul clasic de energie-impuls pentru un câmp general maxwellian. Tensorul de impuls Maxwell (fără μ) apare de-a lungul literaturii în relativitatea generală, dar este întotdeauna specific fie câmpului electromagnetic, fie ecuațiilor lui Maxwell în spațiul liber.

Deși Einstein a prelungit abordarea lui Minkowski pentru a include termenii sursă, el nu a folosit metoda variațională a lui Hilbert și astfel nu a calculat Lagrangianul (3.2.7). În consecință, al doilea termen din (3.2.8) nu apare în prezentarea sa.

Observăm o variantă utilă a metodei originale a lui Hilbert. Variația $\delta\mathcal{L}$ în raport cu variabilele de câmp $A_i, A_{i,j}$ constituie o variație sub constrângerea că geometria spațiului-timp este fixată; iar ecuațiile astfel obținute sunt ecuațiile lui Maxwell pe un spațiu-timp curbilinar fix. Ecuațiile de câmp ale relativității generale sunt obținute prin relaxarea acestei constrângeri, introducând $\mathcal{K}$ și permițând variații atât asupra variabilelor de câmp cât și a celor geometrice g_{ij} și Γ_{jk}^i .

Această abordare ocolește principiul echivalenței, precum și postulatul că spațiul-timp se curbează în prezența unui câmp de forță, arătând că spațiul-timp trebuie să se curveze în prezența unui câmp Maxwell cu excepția cazului în care este constrâns să nu facă acest lucru. Aceasta dovedește universalitatea relativității generale, nemaifiind necesare postulări suplimentare.

Am demonstrat până acum primele două afirmații din teorema 3.2.2.2; demonstrația teoriei unificate a câmpului este foarte simplă. Considerăm o familie de câmpuri maxwelliene, indexate de κ , generate de surse materiale J_κ ; potențiale maxwelliene corespunzătoare A_κ ; câmpurile de forță $F_{\kappa,jk}$; Lagrangienii L_κ ; și multiplicatorii Lagrange ζ_κ corespunzători. Punând $L = \sum_\kappa \zeta_\kappa L_\kappa$ și folosind (3.2.6) avem

$$T_{mn} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{mn}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} \sum_\kappa \zeta_\kappa L_\kappa}{\partial g^{mn}} = \sum_\kappa T_{\kappa,mn}, \quad (3.2.9)$$

unde

$$T_{\kappa,mn} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} \zeta_\kappa L_\kappa}{\partial g^{mn}}.$$

Presupunem că câmpurile fizice liniare interacționează numai prin intermediul câmpului geometric.

3.2.4. Energia negativă

Maxwell a analizat pe scurt posibilitatea de a aplica ideile sale gravitației în tractul său original, dar a abandonat-o din cauza implicațiilor energiei negative a unui câmp atractiv. El a propus un *mediu luminifer*, eterul, ca mediu mecanic pentru a transporta energia undelor. Deoarece energia câmpului unui câmp de forțe atractive este negativă și nu există o limită inferioară asupra acelei energii, eterul ar trebui să aibă o cantitate infinită de energie, a argumentat el, încheind ([13] p. 493)

"Deoarece nu pot să înțeleg în ce mod un mediu poate avea astfel de proprietăți, nu pot merge mai departe în această direcție în căutarea cauzei gravitației".

Multe dintre argumentele referitoare la ecuațiile lui Maxwell pentru gravitație se bazează pe scurta trecere în tratatul său. (Pais, Cap. 9 [17] și discuția din [22]). Dar Einstein a eliminat eterul lui Maxwell cu cele două axiome simple ale relativității speciale; iar energia negativă a câmpului nu este nici o obstrucție a derivării ecuațiilor, nici a cuplării lor cu ecuațiile câmpului relativității generale. De fapt, negativitatea energiei câmpului clasic este esențială pentru înțelegerea astrofizicii.

În [22] secț. 8 este construit un exemplu simplu pentru a arăta că, în calitate de agregate de masă sub influența gravitației, energia câmpului ajunge la $-\infty$. Se consideră familia distribuțiilor de masă Gauss:

$$\rho_{\sigma}(x) \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{3/2} \exp(-\sigma|x|^2), \quad x \in \mathbb{E}^3.$$

Aceste densități au masa totală 1, în timp ce energia totală,

$$\mathcal{E} = -\iint \frac{\rho(x)\rho(y)}{8\pi|x-y|} dx dy, \quad x, y \in \mathbb{E}^3,$$

poate fi calculată explicit și este dată de:

$$\mathcal{E}_{\sigma} = -\frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Când $\sigma \rightarrow \infty$, distribuția de masă se prăbușește la origine $\rho_{\sigma} \rightarrow \delta(x)$, în timp ce $\mathcal{E}_{\sigma} \rightarrow -\infty$.

Teoria distribuțiilor tratează noțiunea de masă punct riguros în ecuațiile diferențiale parțiale liniare; dar rezultatul de mai sus arată că energia gravitațională a unei mase punctuale este $-\infty$, indiferent de cantitate. În construcția elementului de linie Schwarzschild se presupune că tensorul energie-impuls dispare, iar acest lucru implică faptul că sursa de câmp este o funcție Dirac delta cu masa M localizată la origine. Astfel, un sistem neliniar de ecuații diferențiale parțiale descrie o sursă cu o energie negativă infinită. Este singularitatea rezultantă, orizontul evenimentelor, o realitate fizică sau un simplu artefact fals a asumării unui punct de masă?

O stea se formează prin agregarea gazelor, de obicei hidrogen, sub acțiunea gravitației. Odată cu scăderea volumului agregatului, crește temperatura și a presiunea acestuia până la începerea fuziunii termonucleare și oprirea contracției, presiunile câmpurilor gravitaționale și electromagnetice ajung în echilibru. În timpul contracției, scăderea energiei în câmpul gravitațional este compensată de creșterea energiei termice. Aceasta arată că formarea stelelor, și mai general colapsul gravitațional, nu pot fi modelate numai de câmpul gravitațional; alte forme de energie trebuie incluse.

Există un corp amplu de literatură teoretică privind colapsul gravitațional, dar este limitat de faptul că este tratat numai câmpul gravitațional. Un model fizic realist al dinamicii unui corp masiv necesită combinarea a două sau mai multe domenii distincte - masa și energia, de exemplu - o așa-zisă teorie unificată a câmpului, care nu a fost găsită niciodată sub vechea paradigmă.

Procese complementare de prăbușire și explozie gravitațională se manifestă și în recenta observare a unei "unde gravitaționale" de către Observatorul Interferometru Laser de unde Gravitaționale (LIGO), anunțat la 11 februarie 2016 (www.ligo.caltech.edu):

"Oamenii de știință LIGO estimează că găurile negre pentru acest eveniment au fost de aproximativ de 29 și 36 de ori mai mari decât masa Soarelui, iar evenimentul a avut loc acum 1,3 miliarde de ani. Aproximativ de 3 ori masa Soarelui a fost transformată în unde gravitaționale într-o fracțiune de secundă - cu o putere de vârf de aproximativ 50 de ori mai mare decât cea a întregului univers vizibil."

Care este mecanismul care generează propagarea unde "gravitaționale" ? Iată o modalitate de a privi procesul. Coalescența celor două găuri negre are ca rezultat o reducere a energiei gravitaționale (deja negativă) a sistemului. Această scădere este transformată în

energie, parțial în energia termică, electromagnetică și cinetică a găurii negre nou formate, dar și în continuumul spațio-temporal. (Einstein [4] a notat tensorul energie-impuls al spațiului-continuum prin $t_{\mu\nu}$). Spațiul-timp poate fi privit astfel ca mediul luminifer inițial propus de Maxwell – ca "sistemul mecanic" care transportă energia. Am susținut mai devreme că teoria relativității nu trebuie privită ca fiind specifică câmpului gravitațional. Acest lucru ne permite să vedem propagarea undei ca făcând parte din structura spațiului-timp. În timp ce sursa de energie a apărut inițial din câmpul gravitațional, propagarea undei rezultate este pur geometrică în natură; nu mai există surse materiale precum sarcina sau masa implicate.

3.2.5. Câmpuri maxwelliene

În această secțiune obținem ecuațiile statice ale unui câmp maxwellian; discuția din această secțiune este limitată la $\mathbb{E}^3$.

Funcția Hodge este determinată de elementul de volum invariant $dv = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$; detaliile sunt date în secț. 3.2.9. Prin urmare, $dx^i = dx^j \wedge dx^k$, unde i, j, k sunt în ordine ciclică. Operatorul co-adjunct $\delta = *^{-1} d *$ este atunci adjunctul formal al derivatei exterioare d . Pe $\mathbb{E}^3$, $* = *^{-1}$, deci $\delta = * d *$. Pentru dovezi și detalii suplimentare referitoare la teoria lui Hodge, a se vedea secț. 3.2.9 și [22].

Fie $F = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = F_i dx^i$ și $J = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{x} = J_i dx^i$, unde $\mathbf{F}$ este câmpul de forță și $\mathbf{J}$ curentul din (3.2.1) și (3.2.2). Atunci $*F = F_i dx^j \wedge dx^k$. În cazul staționar, $\rho_t = 0$, prin urmare $d * J = 0$, și ecuația. (3.2.2) ia forma:

$$dF = *J, \quad \delta F = \rho. \quad (3.2.10)$$

Descompunerea lui Hodge a spațiilor Hilbert $\Lambda_p(\mathbb{E}^3)$ de p -forme integrabile pătrăte (teorema 3.2.9.2) implică faptul că

$$\Lambda_1(\mathbb{E}^3) = \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{H}, \quad \Lambda_2(\mathbb{E}^3) = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{D}, \quad (3.2.11)$$

unde $\mathfrak{E}$ și $\mathfrak{H}$ sunt subspațiile 1-formelor exacte și co-exacte; în timp ce $\mathfrak{B}$ și $\mathfrak{D}$ sunt subspațiile 2-formelor exacte și co-exacte. Prin (3.2.11) avem $F = E + H$, și $*F = B + D$, unde E, B sunt exacte și H, D sunt co-exacte. Prin urmare, putem scrie $E = -d\phi$ (semnul minus este convențional) și $B = dA$; și din (3.2.10) obținem $dF = *J = dH$, și $\delta F = \rho = *dD$, prin urmare $dD = \rho dv$.

Cele patru forme diferențiale, E, H, B și D formează structura de bază a ecuațiilor câmpului electromagnetic: E și H sunt câmpurile electrice și magnetice, B inducția magnetică și D deplasarea electrică Maxwell. Ecuația $dH = *J$ este legea lui Ampère. Folosim nomenclatura electromagnetismului în cazul general pentru orientare. Dar trebuie să ținem cont de faptul că aceste rezultate nu sunt specifice câmpului electromagnetic.

Teorema 3.2.5.1 *Există parametrii $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{n}, E)$, $\mu = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{n}, H)$, $\mathbf{n}$ un vector situat la $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^3$, astfel încât:*

$$D = \epsilon * E, \quad B = \mu * H. \quad (3.2.12)$$

Aceste două identități se numesc legi ale circumscriptiilor; în [22] au fost luate ca postulate.

Demonstrație. Scriind $D = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ și $*E = -*d\phi = -\nabla\phi \cdot d\mathbf{S}$, observăm că perechea de forme diferențiale sunt pur și simplu proiecțiile câmpului vectorial axial $\mathbf{D}$ și câmpului polar $-\nabla\phi$ de-a lungul liniei normale pe elementul de suprafață $d\mathbf{S}$ în $\mathbf{x}$. Prin urmare sunt multiplii scalari *defacto* unul altuia, multiplul scalar fiind o funcție a lui $\mathbf{x}$, a normalului $\mathbf{n}$, și eventual a intensității câmpului E : $\epsilon = \epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{n}, E)$.

În cazul lui B, H scriem $B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, $*B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{x}$ și $H = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x}$. Înlocuind $d\mathbf{x}$ cu $\mathbf{n} = d\mathbf{x}/ds$, unde s este lungimea arcului de-a lungul curbei normale la o familie de elemente de suprafață $d\mathbf{S}$, observăm că $*B$ și H sunt proiecții ale vectorului axial $\mathbf{B}$ și ale vectorului polar $\mathbf{H}$ de-a lungul acelei curbe, deci multiplii scalari unul altuia. Ca mai sus, $*B = \mu H$, unde $\mu = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{n}, H)$.

Mediul este izotrop dacă ambii ϵ și μ sunt independenți de $\mathbf{n}$ și omogeni dacă sunt independenți de $\mathbf{x}$. În spațiul liber, sunt ambi, de aceea sunt constante prin asumarea invarianței sistemului.

Legile lui Snell privind reflexia și refracția în unde electromagnetice, de exemplu, pot fi derivate matematic când ϵ și μ au discontinuități de salt (vezi Stratton, [24]). Dacă ϵ și μ depind de câmpuri, ca în (3.2.12), ecuațiile de câmp sunt neliniare; aceasta este tocmai situația în domeniul opticii neliniare. Dependența non-locală în cazul electromagnetismului este necesară pentru a explica fenomene precum aberația cromatică, curcubeiele și prismele, deoarece acestea sunt manifestări ale dependenței vitezei luminii de frecvența câmpului (vezi (3.2.3)).

Folosind (3.2.36), ecuațiile statice sunt:

$$\begin{aligned} E &= -d\phi, & dD &= *\rho, & E &= *\frac{1}{\epsilon}D; \\ \delta E &= -*d*d\phi = *d\frac{1}{\epsilon}*D; \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

$$\begin{aligned} B &= dA, & dH &= *J, & B &= \mu *H; \\ \delta B &= \delta dA = *d*dA = *d(\mu H). \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Ecuațiile (3.2.13) și (3.2.14) sunt în "formă divergentă"; această formă trebuie utilizată în cazurile în care ϵ și μ sunt discontinue.

Într-un mediu omogen, unde ϵ și μ sunt constante, ecuațiile se simplifică în:

$$\delta E = -*d*d\phi = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad \delta B = *d*dA = \mu J \quad (3.2.15)$$

Propoziția 3.2.5.2. *Relația $D = \epsilon *E$ este echivalentă cu Legea lui Gauss împreună cu legea pătratică inversă a lui Newton pentru componenta exactă a câmpului. Câmpul este respingător sau atractiv după cum ϵ este pozitiv sau negativ.*

Demonstrație. Deplasarea D , datorată unei surse punctiforme q în origine, este [22]:

$$D = \frac{q}{4\pi} \frac{x_j}{r^3} dx^k \wedge dx^l. \quad (3.2.16)$$

Prin prima relație din (3.2.12), rezultă că:

$$E_i = \frac{q}{4\pi} \frac{x_i}{r^3}.$$

Scriind $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, forța într-o sursă punctiformă de putere g' la $\mathbf{r}$, este atunci:

$$\mathbf{E} = \frac{Gqq'}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad G = \frac{1}{4\pi\epsilon}. \quad (3.2.17)$$

"Linii de forță" ies sau intră în regiunea delimitată de S , după cum $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ este pozitiv sau negativ. Dacă ρ (prin urmare q) este considerat ne-negativ în ambele cazuri, atunci ϵ este pozitiv sau negativ în măsura în care forța este respingătoare sau atractivă. Ecuația (3.2.17) este legea pătratică clasică inversă atunci când G este forma negativă a constantei Cavendish în cazul gravitației, și constantei lui Coulomb în cazul câmpului electrostatic.

3.2.6. Ecuațiile dinamice

Relativitatea specială este exprimată în mod eficient prin formularea ecuațiilor dinamice pe spațiul-timp 4-dimensional $\mathbb{M}^4$ Minkowski, obținut din $\mathbb{E}^4$ punând $x^4 = ict$. Grupul Lorentz este obținut direct din grupul de rotație $SO(4)$ pe $\mathbb{E}^4$; iar operația stea este obținută prin înlocuirea lui x_4 cu ict în (3.2.19), (3.2.20), (3.2.36) în secț. 3.2.9. Convențiile pentru ecuațiile lui Maxwell pe $\mathbb{M}^4$ în cazul general sunt identice cu cele din tratatul clasic al lui Stratton despre electromagnetism [24].

Prin teorema 3.2.9.2, operația stea Hodge pe $\mathbb{M}^4$ inter schimbă p forme exacte cu p 4-forme co-exacte. Dualitatea Hodge este:

$$(A, B) = \frac{1}{ic} \int_{\mathbb{M}^4} A \wedge *B. \quad (3.2.18)$$

Începem prin combinarea densității ρ și curentului $\mathbf{J}$ într-un singur termen sursă, 1-forma $J = J_i dx^i$, $1 \leq i \leq 4$ pe $\mathbb{M}^4$. Dat fiind că înrările din matricele Lorentz sunt numere pure, toate componentele lui J trebuie să aibă aceeași dimensiune. Aceasta, plus legea conservării (1), implică faptul că $J_4 = ic\rho$ și $\delta J = 0$.

În mod similar, combinăm potențialele ϕ și $\hat{A} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}$ din cazul static într-o singură 1-formă $A = A_i dx^i \in A_1(\mathbb{M}^4)$. Prin descompunerea lui Hodge a $A_1(\mathbb{M}^4)$, putem scrie $A = d\psi + \delta\Phi$, dar deoarece câmpul este obținut din dA , termenul $d\psi$ nu are nici un efect; prin urmare, putem presupune că $\delta A = 0$. Luăm $A_4 = i\phi/c$ din motive care vor fi explicate în scurt timp.

Operația stea Hodge pe $\mathbb{E}^4$ asociată cu elementul de volum orientat $dv \wedge dx^4$ este:

$$*dx^j = dx^k \wedge dx^l \wedge dx^4; \quad *dx^4 = -dv; \quad (3.2.19)$$

$$*dx^j \wedge dx^k = dx^l \wedge dx^4; \quad *dx^j \wedge dx^4 = dx^k \wedge dx^l; \quad (3.2.20)$$

$$*dv = dx^4; \quad *dx^j \wedge dx^k \wedge dx^4 = dx^l. \quad (3.2.21)$$

Aici și jos j, k, l iau valori de la 1 la 3 în ordine ciclică. Reținem că $** = (-1)^p id$ pe $\mathbb{E}^4$.

Operația stea Hodge pe $\mathbb{M}^4$ este, atunci, dată prin înlocuirea lui x^4 prin ict în relațiile de mai sus. Elementul de volum $dv \wedge dx^4$ este notat cu $d\omega$. Ecuațiile lui Maxwell în limbajul teoriei Hodge va lua, atunci, forma:

$$F = dA, \quad \delta F = -\mu J. \quad (3.2.22)$$

În cazul specific al câmpului electromagnetic, F este 2-forma de tip Faraday $E \wedge dt + B$. Ecuația (3.2.22) (fără μ) este obținută în [14] începând cu ecuațiile lui Maxwell în formă vectorială.

Prima ecuație din (3.2.22) este echivalentă cu Legea lui Faraday de inducție electromagnetică (vezi [22]), și prin urmare nu poate fi considerată ca o axiomă în cazul general. Procedăm în schimb după cum urmează. (Reamintim că E și B sunt, respectiv, 1- și 2-forme generale, care nu sunt specifice câmpului electromagnetic).

Lema 3.2.6.1. *Fiecare 2-formă exactă poate fi scrisă ca*

$$F = \frac{E}{ic} \wedge dx^4 + B, \quad (3.2.23)$$

unde $E = E_j dx^j$, $B = B_j dx^k \wedge dx^l$ este exact, și (j, k, l) iau valori de la 1 la 3 în ordine ciclică.

Demonstrație. Formele exacte în Λ_2 sunt date de $F = dA$, unde $A = A_j dx^j$, și

$$dA = \sum_{j < k \leq 3} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \right) dx^j \wedge dx^k + \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial A_4}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^4} \right) dx^j \wedge dx^4.$$

Rezultatul rezultă punând:

$$B_i = \frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k}, \quad \frac{E_j}{ic} = \left(\frac{\partial A_4}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^4} \right). \quad (3.2.24)$$

Motivul pentru alegerea lui A_4 este acum evident: a doua ecuație din (3.2.24) dă $E_j = -\partial\phi/\partial x^j$ în cazul special când componenta solenoidă dispare.

În [22] Legea lui Faraday a fost reformulată ca o teoremă; care în esență spune că: dat fiind orice $E = E(x, t)$, există o 2-formă exactă B astfel încât $E \wedge dt + B$ este exactă. Dar două axiome suplimentare au fost necesare pentru derivarea ecuațiilor lui Maxwell: (3.2.3) și extinderea (3.2.12) obținută prin înlocuirea oficială a operației stea pe $\mathbb{E}^3$ prin aceea din $\mathfrak{M}^4$:

$$*D = \epsilon E \wedge dx^4, \quad *B = \mu H \wedge dx^4. \quad (3.2.25)$$

Aceste dualități, împreună cu (3.2.3), au fost luate ca axiome și folosite pentru a dovedi că

$$*F = \mu G, \quad dG = *J, \quad (3.2.26)$$

unde F a fost 2-forma Faraday. Dualitatea (3.2.26) arată că F este co-exactă și implică (3.2.22).

Acum arătăm că (3.2.3) și (3.2.25) pot fi derivate numai din legile constitutive statice (3.2.12), care au fost obținute matematic. Condiția $\delta J = 0$, implică faptul că $d * J = 0$, prin urmare există o 2-formă G astfel încât, local, $dG = *J$. Se scrie

$G = (H \wedge dx^4 - icD)$, unde $H = H_j dx^j$ și $D = D_j dx^k \wedge dx^l$ sunt alese astfel încât $dG = *J$. În limbajul analizei vectoriale, această ecuație dă ecuația Maxwell-Ampère a câmpului electromagnetic [22].

Nu există nici o obstrucție în rezolvarea ecuațiilor pentru G , dar 2-forma nu este neapărat co-exactă.

Lema 3.2.6.2. *Fie F o 2-formă exactă și fie G care satisface $dG = *J$. Atunci $*F = \mu G$ dacă și numai dacă ambele (3.2.3) și (3.2.25) sunt îndeplinite.*

Demonstrație. Dacă ambele (3.2.3) și (3.2.25) sunt satisfacute, atunci

$$*F = * \left(\frac{E}{ic} \wedge dx^4 + B \right) = \frac{1}{ic\epsilon} D + \mu H \wedge dx^4 = \mu \left(H \wedge dx^4 + \frac{1}{ic\epsilon\mu} D \right) = \mu G.$$

În schimb, dacă $*F = \mu G$ atunci:

$$* \left(\frac{E}{ic} \wedge dx^4 + B \right) = \mu (H \wedge dx^4 - icD).$$

Prin urmare, $*B = \mu H \wedge dx^4$ și $*E \wedge dx^4 = \mu c^2 D$; și (3.2.25) sunt stabilite. Rezultă că:

$$\begin{aligned} E_j dx^j \wedge dx^4 &= E \wedge dx^4 = **E \wedge dx^4 = \mu c^2 *D \\ &= \mu c^2 *D_j dx^k \wedge dx^l = \mu c^2 D_j dx^j \wedge dx^4. \end{aligned}$$

Atunci când câmpurile sunt staționare, $D_j = \epsilon E_j$ din (3.2.12); de unde rezultă (3.2.3).

Acum putem completa demonstrația teoremei 3.2.2.1. Având în vedere o sursă compact suportată J , rezolvăm mai întâi sistemul de ecuații $A = -\mu J$, $\delta A = 0$. Ecuațiile $A_i = -\mu J_i$ sunt obținute global fără dificultate, deoarece ecuațiile sunt hiperbolice și J este compact suportată. Condiția Lorentz, $\delta A = 0$, poate fi întotdeauna obținută printr-o transformare gauge dacă este necesar, adică înlocuind A cu $A = d\psi$, unde ψ este determinat de ecuația hiperbolică $\psi = -\delta A$.

Acum punem $F = dA$ și $G = \mu^{-1} *dA$. Atunci F este exactă, G este co-exactă și $dG = *J$. Mai mult decât atât, $*F = \mu G$; prin urmare, rezultă legile constitutive dinamice (3.2.26) și (3.2.3) direct din Lemma 3.2.6.2; fiind, astfel, obținute ecuațiile lui Maxwell (3.2.22).

3.2.7. Hodge / Minkowski.

În plus față de universalitate, ecuațiile lui Maxwell au proprietatea remarcabilă că Lagrangianul (3.2.7) este invariant față de întregul grup al transformărilor de coordonate generale. Aceste două proprietăți, universalitatea și invarianța, reprezintă temeiul pe care este bazată teorema 3.2.2.2. Teoria Hodge, baza pentru dovada universalității, este limitată la grupurile de transformare, lasând măsura $d\omega$ invariantă; dar cum (3.2.7) este tensorială, este suficient să o derivăm în cazul relativității speciale.

Lagrangianul pentru ecuațiile lui Maxwell (3.2.22) este [22]

$$S = \frac{1}{ic} \iiint \frac{1}{2} F \wedge *F + \mu A \wedge *J = \frac{1}{2} (F, F) + \mu (A, J), \quad (3.2.27)$$

unde (F, G) este dualitatea Hodge (3.18). De fapt, denotând variația lui S prin $\dot{S}$, obținem $\dot{S} = ic[(\dot{F}, F) + \mu(\dot{A}, J)]$. Observând că $(\dot{F}, F) = (d\dot{A}, F) = (\dot{A}, \delta F)$, avem:

$$\dot{S} = ic(\dot{A}, \delta F + \mu J).$$

Lasând $\dot{A}$ să varieze în funcție de toate variațiile admisibile și presupunând că acestea sunt un set dens, obținem $\delta F + \mu J = 0$, care, împreună cu relația $F = dA$, cuprind ecuațiile lui Maxwell.

Din (3.2.23) avem

$$\begin{aligned} F \wedge * F &= \left(\frac{E}{ic} \wedge dx^4 \right) \wedge * \left(\frac{E}{ic} \wedge dx^4 \right) + B \wedge * B \\ &= \left(\sum_j B_j B_j - \frac{E_j E_j}{c} \right) d\omega, \quad (d\omega = dv \wedge dx^4), \\ &= \left(B_j B^j + \frac{1}{c^2} E_j E^j \right) d\omega, \end{aligned}$$

unde $B^j = B_j$ și $E^j = E_j$ sunt tensorii contravarianți obținuți prin ridicarea indicilor utilizând tensorul metric Minkowski $\eta = \text{diag}(-1, -1, -1, 1)$.

Din (3.2.23) obținem $F_{kl} = B_j$, $F_{k4} = E_k/ic$. Înlocuind x_4 cu x_4/i și observând că $B^j = F^{kl}$, etc. găsim:

$$(F, F) = \frac{1}{2} F_{jk} F^{jk}.$$

Deoarece F_{jk} este un tensor covariant, contracția lui este invariantă. Termenul sursă (A, J) este transformat în același mod, astfel (3.2.7) rezultă din (3.2.27).

3.2.8. Tensorul energie-impuls

În această secțiune obținem forma explicită a tensorului de energie-impuls (3.2.8) direct din (3.2.6) și (3.2.7). Deoarece acțiunea depinde numai de g_{ij} și nu de derivatele acestora, calculul se reduce la

$$T_{mn} = \mathcal{C}_1(g) \left(-\frac{1}{4} F_{ij} F_{kl} \right) + \mathcal{C}_2(g) (\mu A_i J_j),$$

unde

$$\mathcal{C}_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial g^{mn}} \sqrt{g} g^{ik} g^{jl} \right), \quad \mathcal{C}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial g^{mn}} \sqrt{g} g^{ij} \right).$$

Acești doi coeficienți pot fi simplificați folosind o identitate standard din teoria matricii:

$$\left(\frac{\partial}{\partial g_{ij}} \right) \log g = g^{ji}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial g^{ij}} \right) \log g = -g_{ji}. \quad (3.2.28)$$

A doua identitate decurge din prima, înlocuind matricea g_{ij} cu inversa ei g^{ij} . Prima derivă din expansiunea Laplace a determinantului $g = \sum_i g_{ij} \Delta^{ij}$, unde Δ^{ij} este cofactorul lui g_{ij} . Deoarece Δ^{ij} este independent de g_{ij} , rezultă că $\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = \Delta^{ij} = g^{ji} g$, care este echivalent cu prima identitate.

Folosind (3.2.28) obținem:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial g^{mn}} (\sqrt{g} g^{ij}) = \frac{\partial g^{ij}}{\partial g^{mn}} + \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial \log g}{\partial g^{mn}} = \delta_m^i \delta_n^j - \frac{1}{2} g^{ij} g_{mn}. \quad (3.2.29)$$

Similar:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial g^{mn}} (\sqrt{g} g^{ik} g^{jl}) = \delta_m^i \delta_n^k g^{jl} + \delta_m^j \delta_n^l g^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} g^{jl} g_{mn}. \quad (3.2.30)$$

Asfel rezultă ecuația (3.2.8).

Ecuațiile de câmp ale lui Einstein (ECE) obținute prin abordarea variațională a lui Hilbert sunt prin urmare

$$K_{jk} - \frac{1}{2} K g_{jk} = \zeta T_{jk}, \quad (3.2.31)$$

unde T_{jk} este dat de (3.2.8). Parametrul ζ este necesar pentru a potrivi dimensiunile diferite ale celor două părți ale lui (3.2.31). Acesta poate fi determinat până la o constantă numerică prin analiză dimensională.

Fie ℓ, τ, m, q denotând, respectiv, unitățile de lungime, timp, masă (inertială) și sursă, cu ℓ și τ restricționați, astfel încât $c = \ell/\tau$. Atunci $[dx^i] = \ell$, și $[d] = 1$, adică $[d\eta] = [\eta]$ pentru orice formă diferențială. De asemenea, $[\delta] = [*^{-1} d *] = [*^{-1}][d][*] = 1$.

Pentru a calcula dimensiunea lui T_{jk} , observăm mai întâi că cei doi termeni din (3.2.8) au aceeași dimensiune: din (3.2.22) rezultă că $[F] = [A] = [\mu][J]$; și deci că $[F]^2 = [A]^2 = [\mu A J]$, prin urmare $[F_{jk}^2] = [\mu A_i J^i] = [T_{jk}]$. De asemenea $[J] = [J_i dx^i] = [\rho][v]\ell = [q](\ell\tau)^{-1}$, $[J_i] = q/\ell^2\tau$. Din legea pătratică inversă (3.2.17) se deduce că $[G] = \frac{m\ell^3}{\tau^2 q^2}$. Prin urmare, din (3.2.4) rezultă că $[\mu] = m\ell/q^2$. Din ecuația $A_i = -\mu J_i$, obținem $[A_i] = [\mu J_i]\ell^2 = m\ell/q\tau$.

Cum g_{ij} sunt fără dimensiuni, din (3.2.5) partea stângă a ecuației (3.2.31) are dimensiunea ℓ^{-2} ; prin urmare:

$$\frac{1}{\ell^2} = \zeta [\mu A_i J^i] = \zeta \frac{m^2}{q^2 \tau^2}, \quad \zeta = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{1}{c^2}. \quad (3.2.32)$$

Einstein calculează ζ direct printr-o metodă de perturbare, bazată pe prezumția că dinamica unei particule în mișcare lentă într-un câmp slab în relativitatea generală este aproximată de mecanica newtoniană.

3.2.9. Teoria Hodge

Analiza vectorială este *lingua franca* (limbajul comun) de astăzi al matematicii și fizicii aplicate; dar formele diferențiale au făcut deja o apariție cameo (scurtă) în tratatul lui Maxwell, de exemplu,

$$\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) dydz$$

este "numărul de linii de forță magnetică care trec prin zona $dydz$ ".

Mai jos cităm introducerea lui a deplasării electrice și a curenților săi:

"(55) Deplasarea electrică constă în electrificarea opusă a laturilor unei molecule sau particule a unui corp care poate sau nu să fie însoțită de transmisia prin corp. Fie cantitatea de energie electrică care ar apărea pe fețele dy, dz și un element dx, dy, dz tăiat din corp să fie f, dy, dz , atunci f este componenta deplasării electrice paralelă cu x . Vom folosi f, g, h pentru a indica deplasările electrice paralele cu x, y, z .

Variația deplasării electrice trebuie adăugată curenților p, q, r pentru a obține mișcarea totală a electricității. . . " [13] pg. 480 .

Calculul exterior al formelor diferențiale, dezvoltat de Grassman, Poincaré [19] (Cap. 22) și mai târziu Cartan [1], este compus din două operații, derivata exterioară d , și produsul $\wedge$, acționând pe spațiile liniare Λ_p a p -formelor - tensori covarianți complet antisimetrice de rang p . Ambele operații sunt tensoriale - adică ele sunt aceleași în toate sistemele de coordonate [23], secțiunile 18, 19. Calculul exterior este limbajul natural al teoriei integrării.

Pe operația stea Hodge $*$: $\Lambda_p \rightarrow \Lambda_{n-p}$, asociată cu elementul de volum standard $dv_n = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, se obține prin definirea acțiunii sale pe formele de bază $\eta = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$, astfel încât $\eta \wedge * \eta = dv_n$. Un produs interior pe Λ_p , numit dualitatea Hodge, este, atunci, dat de:

$$(\xi, \eta) = \iiint_{\mathbb{E}^n} \xi \wedge * \eta, \quad \xi, \eta \in \Lambda_p. \quad (3.2.33)$$

Această dualitate definește implicit o adunare formală a lui d , numită co-derivata, $\delta : \Lambda_{p+1} \rightarrow \Lambda_p$, definită de

$$(d\xi, \eta) = (\xi, \delta\eta) \quad \xi \in \Lambda_p, \quad \eta \in \Lambda_{p+1}, \quad (3.2.34)$$

unde ξ, η sunt netezi și compact suportați pe $\mathbb{E}^n$. Co-derivata care acționează pe Λ_p este dată de:

$$\delta_p = (-1)^p *^{-1} d *. \quad (3.2.35)$$

(Acest rezultat a fost demonstrat în [22], Propoziția 2.1. Prima declarație trebuie corectată prin înlocuirea lui δ_p cu δ_{p+1} în partea stângă, apoi înlocuind p cu $p - 1$ în ambele părți).

Folosind aceste rezultate pentru δ_p găsim:

$$\delta_p = (-1)^p * d * \text{ pe } \mathbb{E}^3; \quad \text{și} \quad \delta = * d * \text{ pe } \mathbb{E}^4. \quad (3.2.36)$$

Sub o transformare netedă a coordonatelor $x^i \rightarrow x'^i$ pe $\mathbb{E}^n$, $dv_n \rightarrow dv'_n = J dv_n$, unde J este Jacobianul $\partial(x'^1, \dots, x'^n)/\partial(x^1, \dots, x^n)$. Grupul transformărilor de conservare a volumului pe $\mathbb{E}^n$ sunt cele pentru care $J = 1$. Deoarece operația stea Hodge este definită prin acțiunea sa pe formele de bază $dx^j, dx^j \wedge dx^k, \dots$, o operație stea Hodge invariantă este definită de relația $* \xi' = (* \xi)'$. Operația stea Hodge pe $\mathbb{E}^n$ este astfel invariantă în cadrul grupului transformărilor de conservare a volumului.

Aceleași argumente se aplică pe $\mathbb{M}^4$. Mai mult, d și $\wedge$ sunt tensori - sunt invariante la întregul grup de diffeomorfisme [23]. În consecință, din (3.2.22) vedem că ecuațiile lui Maxwell sunt invariante la întregul grup de transformări de conservare a volumului, nu doar la grupul Lorentz.

Este bine cunoscut faptul că ecuațiile lui Maxwell pot fi scrise în coordonate curbilinii pe o geometrie fixă a spațiului-timp (vezi [10]). Putem extinde discuția de mai sus la această situație. Începem prin a observa că operația stea este un artefact al teoriei de integrare pe varietăți diferențiabile, independent de geometria sa.

Pe o varietate generală riemanniană forma volumului $\sqrt{g} dv_n$, unde $g = \det\|g_{ij}\|$ este determinantul tensorului metric, este invariant la întregul grup de diffeomorfisme. În cazul specific al relativității generale, $n = 4$ și acest element de volum a fost folosit atât de Einstein, cât și de Hilbert. Este invariant la subgrupul care păstrează $d\omega$ (grupul de transformări de conservare a volumului pe $\mathbb{M}^4$); prin urmare, $\sqrt{g}$ este, de asemenea, invariant în cadrul acestui subgrup, și prin urmare este $\sqrt{g} d\omega$.

În coordonate curbilini pe $\mathbb{M}^4$ operația stea învarinată $*_g$ și inversa ei sunt

$$*_g = \sqrt{g} * \quad (*_g)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{g}} *^{-1}, \quad (3.2.37)$$

unde $*$ este de pe $\mathbb{E}^4$. Ecuațiile lui Maxwell în coordonate curbilini sunt obținute prin înlocuirea lui δ cu δ_g :

$$F = dA, \quad \delta_g F = \frac{1}{\sqrt{g}} *^{-1} d\sqrt{g} * F = -\mu J.$$

Aceste ecuații sunt valabile atunci când geometria spațiului-timp este fixată (până la grupul de transformări de coordonate care păstrează volumul). Ecuațiile lui Maxwell în coordonate generale sunt:

$$F_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} F^{ij}}{\partial x^j} = F^i_j = -\mu J^i. \quad (3.2.38)$$

O formă diferențială ξ este *exactă* dacă $\xi = d\phi$ și *co-exactă* dacă $\xi = \delta\psi$. Operația stea Hodge inter schimbă formele exacte și co-exacte. În mod similar, δ este *închisă* dacă $d\xi = 0$ și *co-închisă* dacă $\delta\xi = 0$. O formă diferențială se numește *armonică* dacă este închisă și co-închisă, adică $d\xi = \delta\xi = 0$.

Descompunerea Hodge pe o varietate compactă afirmă că fiecare p -formă (netedă) ω poate fi descompusă ca $\omega = d\xi + \delta\eta + \alpha$, unde α este armonică. Deoarece $(d\xi, \delta\eta) = (\xi, \delta^2\eta) = 0$, etc. este clar că subspațiile de forme exacte, co-exacte și armonice sunt reciproc ortogonale; prin urmare, descompunerea lui Hodge poate fi scrisă și ca:

$$\Lambda_p = [\text{im } d] \oplus [\text{im } \delta] \oplus [\ker d \cap \ker \delta]. \quad (3.2.39)$$

Acum denotăm prin Λ_p spațiul Hilbert al tuturor p -formelor măsurabile ξ pentru care $(\xi, \xi) < +\infty$. Formularea teoremei lui Hodge de mai sus conduce la o simplă dovadă a extinderii sale la aceste spații Hilbert pe baza teoremei bine cunoscute a descompunerii ortogonale.

Propoziția 3.29.1. *Fie $\mathcal{H}$ un spațiu Hilbert, $\mathcal{E}$ un subspațiu, iar $\mathcal{E}^\perp$ complementul său ortogonal. Atunci fiecare element $F \in \mathcal{H}$ poate fi descompus în mod unic ca $F = E + G$, unde $E \in \mathcal{E}$ și $G \in \mathcal{E}^\perp$. Scriem $\mathcal{H} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\perp$.*

Pentru a explica lipsa diferențiabilității elementelor lui Λ_p , descompunerea trebuie să includă noțiunea de derivate slabe. Spunem că $dF = G$ în sensul slab, dacă $(dF, \eta) = (G, \delta\eta)$ pentru toate formele diferențiale netede $\eta \in \Lambda_{p+1}$ cu suport compact. O definiție similară se aplică ecuației $\delta F = G$. Observăm că dacă $dF = G$ în sensul slab și F este C^1 , atunci G este continuu și $dF = G$ în sensul puternic.

Teorema 3.29.2. *Spațiul Hilbert $\Lambda_p(\mathbb{E}^n)$ se descompune în suma directă a forțelor exacte și co-exacte $\Lambda_p = [d \wedge \Lambda_{p-1}] \oplus [\delta \wedge \Lambda_{p+1}]$, unde $[d \wedge \Lambda_{p-1}]$ denotă închiderea L^2 a setului liniar $[dA : A \in \Lambda_{p-1}]$, etc. și în mod implicit, $[d \wedge \Lambda_n] = [\delta \wedge \Lambda_0] = 0$. Atunci fiecare formă diferențiabilă $F \in \Lambda_p$ poate fi scrisă ca $F = dA + \delta\Phi$, unde $A \in \Lambda_{p-1}$ și $\Phi \in \Lambda_{p+1}$.*

*Operația stea Hodge inter schimbă formele diferențiale exacte și co-exacte. Mai precis, deoarece $** = \pm id$,*

$$* [d \wedge \Lambda_p] = [\delta \wedge \Lambda_{n-p}]. \quad (3.2.40)$$

Demonstrație. O formă armonică A satisface $dA = \delta A = 0$, prin urmare $\Delta A = 0$, unde $\Delta = d\delta + \delta d$. Scriind $A = A_\alpha \wedge dx^\alpha$ unde $\alpha = [i_1 < \dots < i_p]$, rezultă că $\Delta A_\alpha = 0$. Prin urmare, fiecare A_α este o funcție armonică în sensul obișnuit pe $\mathbb{E}^n$. Pentru ca ele să fie integrabile pătratic, ele trebuie de asemenea să fie limitate, iar în acest caz ele sunt constante, prin teorema lui Liouville. Aceste constante trebuie să dispară dacă A este să fie integrală pătratică pe $\mathbb{E}^n$; deci nu există componente armonice în descompunerea lui Hodge a lui $\Lambda_p(\mathbb{E}^n)$. Prin urmare descompunerea ortogonală (3.2.39) rezultă, imediat din propoziția 3.2.9.1. Identitatea (3.2.40) rezultă foarte simplu:

$$* [d \wedge \Lambda_p] = \{ * d\alpha : \alpha \in \Lambda_p \} = \{ * d * \beta : \beta = (-1)^{n+1} * \alpha \in \Lambda_{n-p} \} = [\delta \wedge \Lambda_{n-p}].$$

Presupunerea că sursa materialului este suportată compact, implică faptul că F este integrală pătratică pe $\mathbb{E}^n$. Din (3.2.2), F este armonică în afara unei mingii B suficient de mari; și putem presupune, fără pierderea generalității, că $\delta A = 0$. Prin argumentul de mai sus, $\Delta A_\alpha = 0$ în afara lui B și fiecare $A_\alpha = O(r^{2-n})$ la infinit. Rezultă fără dificultate că $F = dA \in \Lambda_{p-1}(\mathbb{E}^n)$.

Concluzii

Relativitatea restrânsă este teoria fizică a măsurării în sistemele de referință inerțiale (SRI) propusă în 1905 de către Albert Einstein în articolul său *Despre electrodinamica corpurilor în mișcare* [2]. Aceasta este bazată pe două postulate: *principiul relativității restrânse și invarianța lui c* . Relativitatea restrânsă modifică noțiunile newtoniene de spațiu și timp afirmând că timpul și spațiul sunt percepute diferit în sensul că măsurătorile privind lungimea și intervalele de timp depind de starea de mișcare a observatorului. Rezultă de aici echivalența dintre materie și energie, exprimată în formula de echivalență a masei și energiei $E = mc^2$, unde c este viteza luminii în vid. Relativitatea restrânsă este o generalizare a mecanicii newtoniene, aceasta din urmă fiind o aproximație a relativității restrânse atunci când vitezele sunt mici în comparație cu viteza luminii.

Postulatele Teoriei relativității restrânse a lui Einstein pot fi exprimate în limbaj matematic sub formă de ecuații, numite transformările lui Lorentz. Acestea leagă coordonatele de poziție și timpul unui eveniment fizic E în două sisteme de referință inerțiale (SRI), S și S' , unde S' este în mișcare relativă, cu viteza $\vec{v}$ constantă, în raport cu sistemul S . Aceste transformări au o serie de consecințe printre care se enumeră: contracția lungimilor, dilatarea timpului, compunerea vitezelor, relativitatea simultaneității și altele.

Este extrem de util să scriem coordonatele spațio-temporale în 4-vectori de forma $X = X^\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, x, y, z)$, cu $\mu = 0, 1, 2, 3$. Pentru transformarea Lorentz a acestor vectori este folosită matricea Λ , iar pentru ridicarea și coborârea indicilor este folosită metrica Minkowski η .

Timpul propriu τ reprezintă durata timpului experimentat de particula în sine. Cu ajutorul acestuia sunt definiți 4-viteza, 4-impulsul, etc. Invariantele Lorentz sunt cantități fizice care rămân neschimbate la transformările Lorentz.

Densitatea de sarcină nu este invariantă Lorentz. Acest fapt sugerează că câmpurile electrice (și magnetice) nu sunt invariante Lorentz. Observatori în SRI diferite vor fi de acord cu privire la modul în care un sistem electromagnetic se comportă, dar vor da explicații diferite pentru comportamentul său. Câmpurile electrice și magnetice sunt „interschimbabile”: dacă observatorii văd un câmp electric sau magnetic într-o anumită situație, depinde de sistemul de referință al fiecăruia.

La transformările Lorentz, câmpurile electrice și magnetice se vor transforma unul în altul. Existența și modul de manifestare al câmpurilor electrice și magnetice depind de mișcarea observatorului. Mai exact, ceea ce pare a fi un câmp magnetic pentru un observator, pare un câmp electric pentru altul și invers.

O ecuație exprimată exclusiv în termeni de 4-vectori și invariante Lorentz se spune că este în formă covariantă și este compatibilă cu relativitatea specială. Ca exemplu putem da ecuația de continuitate, care putând fi scrisă sub formă covariantă (2.19), este compatibilă cu relativitatea specială. Un alt exemplu, sunt ecuațiile lui Maxwell care pot fi scrise sub formă covariantă (2.30), fiind astfel compatibile cu relativitatea specială. De asemenea, un alt aspect al electromagnetismului care este compatibil cu relativitatea specială este forța Lorentz; acest lucru este explicat în sect. 2.5.

Relativitatea generală este teoria geometrică a gravitației, publicată de Albert Einstein în 1916. Ea constituie descrierea gravitației în fizica modernă, unifică teoria relativității restrânse cu legea gravitației universale a lui Newton, și descrie gravitația ca o proprietate a geometriei spațiului și timpului (spațiu-timp). Relația fundamentală a teoriei relativității generale este dată de ecuațiile de câmp ale lui Einstein, un sistem de ecuații cu derivate parțiale.

Teoria relativității a lui Einstein se bazează pe principiul echivalenței, pe teoria invarianțelor a lui Hilbert și calculul variațiilor. Cele două paradigme nu sunt echivalente. Folosind universalitatea ecuațiilor lui Maxwell, metoda variațională a lui Hilbert este utilizată pentru a determina tensorul energie-impuls, și pentru a arăta că relativitatea generală poate fi formulată pe baza câmpurilor Maxwelliene, în loc de câmpurile de forță fizică specifice. Se dovedește o teorie unificată a câmpului, în care câmpurile de forță Maxwelliane sunt pe poziții de compatibilitate, distincte de câmpul geometric.

Tensorul energie-impuls este fundamental pentru modelarea câmpurilor gravitaționale intense, generate de obiectele în mișcare, de exemplu, o stea binară sau coliziunea a două găuri negre. De asemenea, este folosit în modelarea câmpurilor concurente, cum ar fi câmpurile electromagnetice și gravitaționale din interiorul unei stele. Acest tensor a fost determinat în mod unic în formularea lui Hilbert a relativității generale ca o problemă în calculul variațiilor pe varietatea spațio-temporală (vezi sect. 3.2.3). Dar a existat o problemă: s-a dovedit a fi tensiunea clasică Maxwell de energie-impuls și ecuațiile lui Maxwell erau considerate ca fiind specifice câmpului electromagnetic. Acest fapt conduce la o "cuplare" inexplicabilă a câmpurilor gravitaționale și electromagnetice.

Ecuațiile lui Einstein împreună cu tensiunea clasică Maxwell pentru câmpul electromagnetic, ca tensor de energie-impuls, sunt numite ecuațiile Einstein-Maxwell.

O încercare timpurie de a combina electromagnetismul și gravitația într-o singură teorie relativistă a apărut în Nordström [15], precedând atât pe Hilbert, cât și pe Einstein. În urma publicării teoriei lui Einstein și a construcției lui Schwarzschild a elementului de linie asociat, Reissner [21] și Nordström [16] au obținut în mod independent tensori metrici pentru ecuațiile Maxwell-Einstein pentru opțiuni speciale ale câmpului electromagnetic care intenționează să reprezinte câmpul gravitațional generat de către corpuri sferice, atât cu masă cât și cu sarcină electrică. Metrica asociată este cunoscută ca Metrica Reissner-Nordström [25] Wald, Cap. 6, Problema 3. Tensorii metrici pentru ecuațiile Einstein-Maxwell stau la baza teoriei moderne a găurilor negre (vezi secțiunea 12.3 Wald).

Această discrepanță între teorie și practică este rectificată de teorema 3.2.2.1, care demonstrează că ecuațiile lui Maxwell sunt universale, independente de natura fizică a sursei de material care generează câmpul. În teorema 3.2.2.2 metoda variațională a lui Hilbert este combinată cu universalitatea ecuațiilor lui Maxwell pentru a obține o formulare a relativității generale bazată pe câmpuri Maxwelliane, în loc de câmpuri de forță specifice.

Există o a doua problemă cu formularea lui Einstein a teoriei sale. În [4], el a declarat

"Conform teoriei generale a relativității, gravitația ocupă o poziție excepțională în raport cu alte forțe, în special forțele electromagnetice, deoarece cele zece funcții care reprezintă câmpul gravitațional în același timp definesc proprietățile metrice ale spațiului măsurat. "

Această premisă a plasat câmpurile electromagnetice și gravitaționale pe poziții incompatibile - câmpul gravitațional ca structură riemanniană în spațiul-timp și câmpul electromagnetic ca teorie de câmp liniar pe spațiul Minkowski. Din acest punct de vedere,

Kaluza [9] a modificat lucrarea lui Nordström și a lui Reissner pentru a obține o unificare a gravitației și a electromagnetismului în conformitate cu premisa lui Einstein. Ca și Hilbert, teoria lui Kaluza s-a bazat pe o metodă variațională.

Electromagnetismul și gravitația diferă cu siguranță la nivel microscopic – în interacțiunea câmpului cu materia, de exemplu legile lui Snell de reflexie și refracție în electromagnetism; și în interacțiunile subatomice, care sunt domeniul mecanicii cuantice. Dar premisa lui Einstein nu este susținută de nici un experiment fizic în cazul macroscopic și este contrazisă de Teorema 3.2.2.1.

Teorii relativiste ale gravitației construite pe ecuațiile lui Maxwell și invarianța lui Lorentz sunt văzute la Heaviside [7], Lorentz [12] și Poincaré [20]. Teorema 3.2.2.1 nu trebuie a fi interpretată ca dovadă că ecuațiile lui Maxwell sunt un model fizic valabil pentru gravitație. Dimpotrivă: noțiunile actuale despre rolul ecuațiilor lui Maxwell trebuie să fie reexaminat. Ele sunt doar modele aproximative ale teoriei câmpului - atât în cazul electromagnetic cât și în cazul gravitației - valabile pentru câmpurile slabe. Efectele curburii devin vizibile în prezența câmpurilor puternice.

Atunci când Teorema 3.2.2.1 este încorporată în metoda variațională a lui Hilbert, tensorul de energie-impuls Maxwell asociat cu câmpul în cauză se consideră a fi tensorul unic de energie-impuls care este folosit în ecuațiile relativității generale. Deci, ecuațiile lui Maxwell stau la baza determinării tensorului de energie-impuls.

Universalitatea ecuațiilor lui Maxwell pune toate câmpurile de forță generate de o sursă materială pe poziții de compatibilitate, conducând la o teorie unificată a câmpului în care structura geometrică a teoriei lui Einstein nu mai este specifică niciunui câmp de forță fizică. În schimb, este mecanismul de transmitere și interacțiune a forțelor fizice prin curbarea continuumului spațiu-timp.

Aceste rezultate au consecințe semnificative pentru relativitatea generală. Deoarece tensorul corect de energie-impuls nu a fost folosit niciodată, o bună parte din teorie va trebui reexaminată. De exemplu, corpul vast de cercetare privind colapsul gravitațional se ocupă numai cu câmpul gravitațional și ignoră câmpul electromagnetic concurențial (vezi secțiunea 3.2.4); întrucât stabilitatea și colapsul gravitațional final al unei stele sunt consecințele câmpurilor concurente, de exemplu câmpurile electromagnetice și gravitaționale.

Din punct de vedere istoric, Maxwell a derivat ecuațiile sale dinamice pentru câmpul electromagnetic folosind legile empirice ale electromagnetismului, în special legea lui Faraday de inducție electromagnetică. În timp ce teoria originală a fost considerabil simplificată, toate derivările existente se bazează într-un fel sau altul pe Legea lui Faraday.

Este esențial pentru abordarea invarianțială a lui Hilbert față de relativitatea generală ca ecuațiile lui Maxwell să fie invariante la întregul grup de difeomorfism al spațiului-timp. Formularea lui Minkowski a acestora este limitată la spațiu-timp Minkowski, unde grupul de invarianță este grupul Poincaré. Această formulare este ușor extinsă pentru a obține reprezentarea tensorială a ecuațiilor lui Maxwell și a fost cunoscută atât de Einstein, cât și de Hilbert.

Forma vectorială a ecuațiilor, sistemul cuplat al ecuațiilor diferențiale parțiale pentru $\mathbf{E}$ și $\mathbf{B}$, poate fi obținut direct din formularea lui Minkowski. Forma vectorială a ecuațiilor este cea mai simplă formă a ecuațiilor lui Maxwell și este omniprezentă în literatura de specialitate, de ex. [5,10,14].

Pentru a dovedi universalitatea ecuațiilor lui Maxwell, trebuie să derivăm ecuațiile în mod direct, folosind Legea lui Faraday. Acest lucru se face în secț. 3.2.6 prin înlocuirea legilor lui Faraday și Maxwell-Ampère cu cele două ipoteze ale lui Einstein din relativitatea specială. Se constată că ambele legi sunt valabile pentru toate câmpurile maxwelliene; acestea nu sunt presupuse în prealabil, ci urmează ca corolare matematice a relativității

speciale. Derivarea se bazează pe 2 forme care corespund legilor Maxwell-Ampère și Faraday; iar dualitatea Hodge joacă un rol substanțial în demonstrație.

Pentru a extinde universalitatea la formele tensoriale și vectoriale ale ecuațiilor, este suficient să se arate că formularea lui Minkowski poate fi obținută direct din forma lui Hodge a ecuațiilor; aceasta se face în secț. 3.2.7.

Metrica Schwarzschild este o soluție singulară pentru ecuațiile lui Einstein - ecuațiile Euler - Lagrange pentru "Riemannsche Krümmungsinvariant" (Curbura scalară Rici). Este o soluție la problema variațională a lui Hilbert? Nici macar nu este clar că integrala există, datorită singularității Schwarzschild. Analiza matematică a unor astfel de singularități joacă un rol central în cosmologia modernă, în special teoria găurilor negre (Wald, capitolele 9 și 12).

Paradigma lui Hilbert, așa cum se realizează în Teorema 3.2.2.2, deschide calea unei abordări matematice alternative a cosmologiei, bazată pe calculul variațiilor. Unele exemple sunt discutate pe scurt în secț. 3.2.3.



Bibliografie

1. Cartan, É.: Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff. Annales scientifiques de l'É.N.S. 33 série 16, 239–332 (1899).
2. Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Annalen der Physik, 1905. Translated as On the Electrodynamics of Moving Bodies, In: The collected papers of Albert Einstein. Vol. 2, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989; Anna Beck translator
3. Einstein, A.: Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, 1907. Translated as On the relativity principle and the conclusions drawn from it, op. cit
4. Einstein, A.: Die Grundlagen der Allgemeine Theorie der Relativität. Annalen der Physik, 1916. Translated as The Foundation of the General Theory of Relativity, op. cit
5. Feynman, R., Leighton, R., Sands, M.: Lectures on Physics, vol. 2. Addison Wesley, Reading, Massachusetts (1963)
6. Fuchsichy, W.I., Nikitin, A.G.: Symmetries of Maxwell's Equations. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (1987)
7. Heaviside, O.: A gravitational and electromagnetic analogy. The Electrician 31, 281–282 (1893)
8. Hilbert, D.: David Hilbert's Lectures on the Foundations of Physics, 1915–1927, volume 5 of David Hilbert's Lectures on the Foundations of Mathematics and Physics, 1891–1933. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (2009) Physics, 1915–1927, volume 5 of David Hilbert's Lectures on the Foundations of Mathematics and Physics, 1891–1933. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009
9. Kaluza, T.: Zum Unitätsproblem in der Physik. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin Math. Phys. 15, 966–972 (1921)
10. Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: The Classical Theory of Fields. Elsevier, Amsterdam (1975)
11. Levenson, T.: The Hunt for Vulcan. Random House, New York (2015)
12. Lorentz, H.A.: Considerations on gravitation. Proc. R. Neth. Acad. Arts Sci. 2, 559–574 (1900)
13. Maxwell, J.C.: A dynamical theory of the electromagnetic field. Philos. Trans. R. Soc. Lond. 155, 459–512 (1865)
14. Misner, C., Thorne, K., Wheeler, J.A.: Gravitation. Freeman, New York (1973)
15. Nordström, G.: Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen. Physik. Zeitschr. 15, 504–506 (1914)
16. Nordström, G.: On the energy of the gravitational field in Einstein's theory. Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20, 1238–1245 (1918)
17. Pais, A.: Subtle is the Lord, The Science and Life of Albert Einstein. Oxford University Press, Oxford (1982)
18. Pohjanpelto, J.: First order symmetries of Maxwell's equations. Phys. Lett. A 129, 148–150 (1988)
19. Poincaré, H.: Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Tome 3. Gauthiers-Villars, Paris (1892)
20. Poincaré, H.: Sur la dynamique de l'électron. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 21, 129–176 (1906)
21. Reissner, H.: Über die Eigengravitation des elektrischen Felds nach der Einsteinschen Theorie. Ann. Physik 50, 106–120 (1916)
22. Sattinger, D.H.: Gravitation and special relativity. J. Dyn. Differ. Equ. 27, 1007–1025 (2015)
23. Sattinger, D.H., Weaver, O.L.: Lie groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics. Springer, New York (1986)
24. Stratton, J.A.: Electromagnetic Theory. McGraw-Hill, New York (1941)
25. Wald, R.: General Relativity. University of Chicago Press, Chicago (1984)
26. Weinberg, S.: Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. John Wiley & Sons, New York (1972)